

collection Lycée  
série Accompagnement des programmes

# Mathématiques

**classe terminale**  
**série scientifique**  
**série économique et sociale**

Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche  
Direction de l'enseignement scolaire

applicable à la rentrée 2002

Centre national de documentation pédagogique

Ce document a été rédigé par le groupe d'experts sur les programmes scolaires de mathématiques :

Pierre ARNOUX	professeur des universités, Institut de mathématiques de Luminy (CNRS) et université de la Méditerranée
Antoine BODIN	professeur, expert de l'OCDE, spécialiste de l'évaluation des compétences en mathématiques
Françoise CELLIER	professeure, lycée Charlemagne de Paris
Philippe CLAROU	professeur, IUFM de Grenoble
Gilles GODEFROY	directeur de recherche, CNRS-université Paris-VI
André LAUR	professeur, lycée Emmanuel-Mounier de Grenoble
Jean-Paul QUELEN	professeur, lycée Jean-Monnet de Strasbourg
Jean MOUSSA	inspecteur général de l'Éducation nationale
Claudine ROBERT	présidente du groupe d'experts, professeur des universités, université Joseph-Fourier de Grenoble
Erick ROSER	IA-IPR, académie de Poitiers
Nicolas ROUCHE	professeur émérite, Centre de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Belgique
Johan YEBBOU	professeur en CPGE, lycée Charlemagne de Paris

**Consultante pour les technologies de l'information et de la communication :**

Anne Hirlimann, experte auprès de la SDTICE (direction de la technologie)

**Coordination :**

Jérôme Giovento, bureau du contenu des enseignements (direction de l'enseignement scolaire)

**Suivi éditorial :** Christianne Berthet

**Secrétariat d'édition :** Nicolas Gouny

**Maquette de couverture :** Catherine Villoutreix

**Maquette :** Fabien Biglione

**Mise en pages :** Michelle Bourgeois

© CNDP, juillet 2002

ISBN : 2-240-00854-7

ISSN : 1624-5393

# Sommaire

<b>Préambule</b> .....	<b>5</b>
------------------------	----------

## Série scientifique

<b>Orientations générales</b> .....	<b>9</b>
Les enjeux de la classe terminale .....	9
Enseigner les mathématiques – résoudre des problèmes .....	11
Enseigner les mathématiques – construire un corpus mathématique .....	26
Organisation du travail des élèves .....	30
<b>Analyse</b> .....	<b>31</b>
Un concept important – celui d'équation différentielle .....	31
Suites et fonctions .....	34
Limites et comportements asymptotiques .....	36
Langage de la continuité .....	38
Fonctions .....	38
Calcul intégral .....	40
<b>Géométrie</b> .....	<b>45</b>
Nombres complexes .....	45
Géométrie dans l'espace .....	49
<b>Programme de spécialité</b> .....	<b>53</b>
Arithmétique .....	53
Similitudes .....	60
Sections planes de surfaces .....	68
<b>Annexe</b> .....	<b>73</b>
Radioactivité .....	73

## Série économique et sociale

<b>Orientations générales</b> .....	<b>87</b>
Les enjeux de la classe terminale .....	87
Quel enseignement mathématique dans la série ES ? .....	88
Organisation du travail des élèves .....	90
<b>Analyse</b> .....	<b>91</b>
Fonctions numériques .....	91
Limites .....	92
Dérivées et primitives .....	94
Coût marginal .....	95

<b>Enseignement de spécialité</b> .....	<b>99</b>
Résolution de problèmes à l'aide de graphes .....	99
Complément sur les suites .....	99
Géométrie dans l'espace .....	102
<b>Annexe</b> .....	<b>105</b>
Les graphes dans l'enseignement de spécialité .....	105

## **Cédérom Mathématiques 2002**

<b>Contenu du cédérom</b> .....	<b>123</b>
---------------------------------	------------

La version de ce document incluse dans le cédérom l'accompagnant se poursuit par une annexe « Probabilités et statistique » commune aux séries ES et S, dont le sommaire est indiqué ci-dessous pour information.

La version complète de ce document est également accessible sur l'espace « Lycée » du CNDP, à l'adresse [www.cndp.fr/lycee](http://www.cndp.fr/lycee).

### **Annexe**

<b>Probabilités et statistique en terminale ES et S</b> .....	<b>126</b>
Introduction .....	126
Étude de deux variables qualitatives. Fréquence conditionnelle .....	126
Probabilité conditionnelle et indépendance .....	128
Formule des probabilités totales .....	130
Expériences indépendantes ; expériences indépendantes et identiques .....	131
Études de deux variables quantitatives .....	134
Lois de probabilités .....	139
Deux problèmes .....	145
Statistique et TICE .....	149
Cahier de statistique .....	152

# Préambule

Les mathématiques sont une discipline exigeante. Les élèves que nous invitons à l'effort sont en droit de se s'interroger sur les raisons qui poussent « à en faire ». Elles sont un langage universel, mieux adapté que tout autre à certains aspects de notre univers, et seul capable de décrire le monde physique à des échelles de temps ou d'espace étrangères à notre vie quotidienne. Science du nombre et de l'espace, elles permettent de formaliser, de modéliser, de prédire, mais encore d'énoncer leurs propres limites dans tous ces usages. Les élèves peuvent y pratiquer la démarche critique qui exige de chacun des arguments probants et ainsi apprécier les certitudes que ceux-ci fournissent. Ils peuvent encore expérimenter la capacité de modélisation des mathématiques, tout en comprenant que le modèle, le sondage, l'équation ne sont pas la réalité et doivent sans cesse y être confrontés. Les mathématiques participent ainsi, modestement mais profondément, à la formation des jeunes citoyens, en les éloignant des extrêmes également nuisibles que sont le rejet irrationnel de la connaissance scientifique et une science sans conscience. Ce fascicule complète la série de documents d'accompagnement des nouveaux programmes du lycée en classe de seconde générale et technologique et dans le cycle terminal des séries générales. Cet ensemble forme un tout structuré en entités autonomes, par classe et par niveau, mais liées par divers renvois et complété par un CD-ROM proposant entre autres des logiciels et des applications réalisées par des collègues de diverses académies. Il définit les contours d'une culture commune à tous les enseignants de mathématiques.

L'objectif principal de ces documents est de donner des repères et des éclairages sur certains aspects du programme. On y trouvera des thèmes de travail consistants et des pistes d'activités à partir desquels il revient à chaque enseignant d'organiser le travail des élèves (très peu d'exemples sont directement « prêts à l'emploi »). La taille de chacun des chapitres est fonction de sa nouveauté et du choix des auteurs d'illustrer certaines démarches et, au-delà, de faire évoluer certaines pratiques pédagogiques ; elle ne doit pas être considérée comme un indicateur du temps à y consacrer, ni de l'importance des concepts en jeu. Ces documents sont aussi adressés aux enseignants de l'enseignement supérieur : ceux-ci pourront y trouver en particulier l'esprit de l'enseignement dispensé au lycée.

Le travail présenté ici est le fruit d'une réelle collaboration entre des enseignants du secondaire et du supérieur, et des membres des corps d'inspection. Il a aussi bénéficié des commentaires recueillis lors des journées interacadémiques regroupant des professeurs formateurs et tous les inspecteurs d'académie, inspecteurs pédagogiques régionaux de mathématiques. Il ne propose volontairement pas de bibliographie, ne conférant aucun caractère institutionnel au choix inévitablement limitatif de tel ou tel ouvrage ; néanmoins, plusieurs sites académiques en proposent et le Web rend accessibles de nombreuses ressources. Des exemples d'exercices sont donnés : ils apportent quelques précisions sur le niveau de compétences attendu, délimitant ainsi des contours précis pour ce que l'on peut attendre d'un élève en fin de terminale. Aucune « compétence exigible » n'est cependant formalisée : la publication d'une liste de ces compétences, bien que rassurante pour le proche avenir, ne manquerait de causer, à moyen terme, un certain appauvrissement des contenus, nuisant inévitablement à la cohérence du programme.

- La partie concernant la série scientifique s'ouvre sur une présentation générale du programme. Cette introduction prend sa place dans le débat qui entoure le renouvellement des programmes scolaires, débat parfois vif sur des points centraux de

l'enseignement des mathématiques : par exemple, quelle est la place de la démonstration dans l'enseignement des mathématiques ? Quel équilibre entre la formation d'élèves dans le cadre d'un parcours scolaire global et la préparation de candidats à l'examen du baccalauréat ? Quelle place pour le travail personnel des élèves ?

Une grande partie des contenus du tronc commun figurait déjà dans les programmes précédents. Ce document met en avant la cohérence entre les différents chapitres de l'année terminale et établit un lien avec ceux des années précédentes et des études supérieures. Il insiste aussi sur les questionnements historiques ou contemporains que ces contenus permettent d'entrevoir.

La partie consacrée à l'enseignement de spécialité de la série S met l'accent sur l'étude des similitudes, envisagée différemment par rapport au programme précédent.

Une annexe, sur l'étude de la radioactivité complète cette partie consacrée à la classe terminale : elle illustre la volonté d'introduire certains objets mathématiques (fonction exponentielle, lois de probabilité à densité continue) à travers l'étude de ce phénomène.

Une grande partie des concepts et des raisonnements mathématiques sont nés, et naissent encore aujourd'hui, dans des chantiers scientifiques où, tels différents corps de métiers, chaque discipline a sa fonction et interagit avec les autres. Cette annexe sera également diffusée aux enseignants de physique-chimie et de sciences de la vie et de la Terre, contribuant ainsi au dialogue entre les enseignants de ces disciplines.

- Le programme du tronc commun de la série ES subit peu de changements par rapport au programme précédent. Ce document se contente donc d'en situer les grandes lignes et de traiter quelques thèmes illustrant la spécificité de cette série.

Le programme de l'enseignement de spécialité, en revanche, comprend une partie tout à fait novatrice, tant par son contenu que par l'approche qui en est préconisée : il s'agit de l'introduction d'éléments de la théorie des graphes, exclusivement traitée par la résolution de problèmes. Un exemple de ce qui pourrait être fait dans ce domaine est décrit dans une annexe, à travers une liste d'exercices. Cette liste témoigne de la faisabilité du programme proposé et peut évidemment servir de base au travail de préparation des enseignants, mais ne constitue en aucun cas un « programme d'exercices officiels ».

- À la fois dans les séries ES et S, l'approche des phénomènes aléatoires constitue une nouveauté importante. Une partie du programme de probabilités-statistique étant commune aux deux séries, ce chapitre fait l'objet d'une annexe valant pour les deux séries. On notera que les probabilités interviennent aussi dans l'annexe consacrée à l'étude de la radioactivité et dans le programme de l'enseignement de spécialité de la série ES, à travers les graphes probabilistes.

L'ensemble des documents proposés intègre l'usage des calculatrices, tableurs et logiciels de géométrie dynamique, dans le déroulement même des sujets exposés : pour cette raison, il n'est pas proposé de paragraphes spécifiquement dédiés à l'utilisation des technologies de l'information et de la communication. On trouvera, en complément sur le cédérom joint, des logiciels et des animations à utiliser dans le cadre du déroulement des programmes, ou plus particulièrement adaptés à l'autoformation des enseignants.

*Remarque* – Quelques éléments de ce document dépassent clairement les limites du programme : ils ont été rédigés afin de participer, aussi modestement soit-il, à la formation continue des enseignants. Ils sont repérés par une trame de fond bleutée.

**Série scientifique**





## Les enjeux de la classe terminale

La classe terminale marque la fin des études secondaires et, à travers l'examen du baccalauréat, ouvre la voie des études supérieures ; ces deux aspects influent profondément à la fois sur les choix faits dans le programme et sur les pratiques des enseignants et des élèves. Ils entraînent des contraintes inévitables et des points de vue divers, avec lesquels il faut composer.

### Un enseignement en spirale sur le cycle terminal

Les programmes de terminale et de première S ne peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre. C'est sur les deux ans que la plupart des notions du programme sont à construire et à installer, que les spécificités de la série S sont à développer. L'enseignement mathématique, tant sur une année donnée que sur l'ensemble du cursus secondaire, relève d'une démarche « en spirale » : on revient régulièrement sur une notion déjà étudiée pour la compléter, l'appliquer dans un nouveau contexte, l'insérer dans un cadre plus large... bref, la faire vivre.

#### Exemples

La notion de *limite* est introduite en première de façon intuitive, tant pour les fonctions en un point ou à l'infini que pour les limites infinies de suites ; il est en revanche demandé de présenter dès la première une définition formelle de la limite finie d'une suite et de prolonger en terminale ce travail de formalisation pour les limites d'une fonction à l'infini. Les mathématiciens ont longtemps travaillé sans une telle définition formelle et on pourrait envisager un enseignement secondaire qui s'appuie sur la seule intuition ; celle-ci reste à privilégier et, comme il est dit dans le document d'accompagnement de première S, il ne s'agit « en aucun cas de tout compliquer par une définition dont on ne comprend pas la nécessité ou d'essayer subrepticement de couper des  $\epsilon$  en quatre ». Accéder à une définition formelle permet néanmoins de mieux comprendre le fonctionnement interne du monde mathématique : l'objectif est de situer la place et l'importance d'une telle définition dans la construction des mathématiques ; elle permet de préciser la notion en jeu et de démontrer les règles opératoires évoquées dans le programme mais ces démonstrations ne sont pas un objectif premier à ce niveau d'études.

Les *coordonnées polaires* introduites en première et reprises en terminale lors de l'étude de la forme trigonométrique des nombres complexes, la *méthode d'Euler* développée sur un ou deux exemples en première pour faciliter l'introduction de la fonction exponentielle dès le début de terminale sont d'autres exemples d'une telle progression en spirale.

#### Avancer dans la compréhension des concepts et la maîtrise du calcul

À chaque étape du parcours scolaire est proposée la découverte de nouveaux problèmes, de nouveaux horizons, de nouveaux concepts : cela répond au souci de l'institution scolaire de former le plus complètement possible les jeunes qui lui sont confiés, en répartissant sur l'ensemble de la scolarité les divers objets d'enseignement selon leur adaptation aux capacités d'une classe d'âge. Cette adaptation tient compte de l'expérience passée (anciens programmes et habitudes d'enseignement, études validant telle

ou telle progression...) ; elle doit aussi prendre en compte les réalités et les exigences de la société contemporaine. En ce qui concerne les mathématiques de la série S, on aura le souci d'avancer dans la découverte des nouveaux concepts malgré la moindre technicité que l'on peut observer aujourd'hui chez les élèves de cette section. La maîtrise du calcul reste un objectif de base de l'enseignement des mathématiques ; cette maîtrise est à rechercher et obtenir pour les situations élémentaires, telles celles des exemples 1 et 2 qui suivent ; elle donne l'aisance indispensable pour comprendre et traiter un problème sans se bloquer sur la moindre aspérité calculatoire. Cela a déjà été dit dans les documents d'accompagnement des classes antérieures : il convient de rester exigeant en la matière et de faciliter l'acquisition de réflexes qui tout à la fois libèrent la pensée et procurent confiance en soi. L'acquisition de ces réflexes doit cependant respecter l'intelligence du calcul et répondre à un besoin avéré sur le long terme ; s'il faut une maîtrise du calcul élémentaire (pour comprendre l'intérêt du calcul intégral ou des nombres complexes, par exemple), il est inutile de rechercher systématiquement la virtuosité. La compréhension des méthodes importe d'autant plus qu'à un certain niveau supérieur d'études (et dans un délai peut-être proche dans l'enseignement secondaire), les outils de calcul formel permettent d'aborder des situations calculatoires demandant une plus grande technicité ou de déléguer à la machine la réalisation de tâches techniques longues. Dans l'immédiat, les éventuels manques techniques ne doivent pas empêcher de progresser dans l'étude d'objets nouveaux, qui peut au contraire inciter à les combler.

### Exemples. Le préalable du calcul

1) Lors de l'étude de la fonction  $f$  suivante proposée en devoir surveillé :  $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}$ , un certain nombre d'élèves, ayant calculé correctement  $f'(x)$ , ont été incapables de réduire l'étude du signe de  $f'(x)$  à celle du signe de  $2x^3 + x^2 - 1$  !

À ce niveau d'étude, ce type de difficulté constitue un obstacle majeur : les élèves en question ne maîtrisent pas suffisamment le calcul.

2) Le calcul de  $f'$  lorsque  $f(x) = f(x) = \left(\frac{x^2-3}{x^2-1}\right)^2$  pose problème à de nombreux élèves. Ce calcul devrait être correctement conduit jusqu'à son terme par tout élève de la série S, y compris dans le cadre d'un devoir surveillé ; néanmoins une erreur de calcul paraîtra ici moins inquiétante.

3) Pour  $f$  définie par  $f(x) = (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$ , le calcul de  $f'(x)$  peut être un exercice d'entraînement (un élève de série scientifique doit être capable, en dehors de toute évaluation, de mener à bien ce calcul en l'organisant correctement) ; si ce calcul apparaît lors de la résolution d'un problème, le recours à un logiciel de calcul formel peut être la méthode la plus efficace pour faire le calcul ou en vérifier la justesse : cela n'enlève rien à la qualité du travail mathématique mené par l'élève.

### Des réflexes mathématiques

La mémorisation de certaines formules est nécessaire au développement de l'intelligence du calcul : si on ne connaît pas la formule  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , comment aurait-on l'idée de retrouver dans une expression la forme  $a^2 - b^2$  pour la factoriser ? Par ailleurs, la pratique répétée du calcul inscrit en mémoire un registre de situations et de formes auxquelles on pourra se ramener : plus riche est ce registre, plus grande sera la palette de situations techniquement maîtrisables.

## Formation générale et/ou préparation à l'examen

L'enseignement de la classe terminale ne se réduit pas à la préparation de l'examen du baccalauréat : nous le rappelons ici avec force. L'objectif est la formation des élèves : une formation aussi complète et solide que possible, dans un cadre établi par le législateur et préparant l'avenir tant de l'individu qui reçoit cette formation que de la société qui l'a définie. De nombreux aspects de cette formation sont difficiles à prendre en compte lors de l'examen final du baccalauréat ; ils ne sont pas pour autant à négliger. L'examen du baccalauréat motive fortement un grand nombre d'élèves ; il donne une échéance visible à leur travail scolaire. Il paraît donc judicieux, en dépit de ses aspects inévitablement codifiés, d'en user comme d'un levier pour le travail intellectuel. L'art de l'enseignant reste, comme par le passé, de résoudre des oppositions, de parfois contraindre pour ensuite convaincre ou tout au moins obtenir l'adhésion, de conjuguer au mieux l'entraînement intensif à une épreuve clairement identifiée et le développement harmonieux de capacités intellectuelles.

Faire des problèmes de baccalauréat est un entraînement naturel, qu'on ne saurait éliminer ; travailler sur des annales permet de se situer par rapport à cette épreuve. Cependant, les contraintes de l'examen national conduisent souvent à des énoncés amputés de tout aspect heuristique : durant l'année, on n'hésitera pas à en réécrire certains pour en relever l'intérêt mathématique.

### Quel enseignement mathématique ?

La plupart des élèves issus de la série S compléteront leur formation en mathématiques. Certains d'entre eux les utiliseront, notamment dans le cadre de modélisations ou en interaction avec d'autres disciplines ; quelques-uns deviendront professeurs et/ou chercheurs dans une matière scientifique. Pour tous, l'enseignement de mathématiques se doit d'être une formation au maniement des concepts et de l'abstraction avec le souci premier de développer les capacités de les mettre en œuvre : l'impact au niveau d'une génération d'une formation en mathématiques ne se mesure pas tant au nombre de théorèmes et de propriétés qu'on retient, qu'à la manière d'aborder certaines situations dont les liens avec les mathématiques ne sont pas toujours explicites (capacités de formalisation et de conceptualisation, d'action et d'interprétation rationnelle de faits sociaux, etc.).

Le programme précise les contenus et suggère un certain nombre de démarches : il demande en particulier d'associer résolution de problèmes et présentation de la théorie mathématique. Chaque enseignant peut avoir sa sensibilité propre : l'un peut préférer l'exposé rigoureux et sans faille d'un thème mathématique, l'autre prendre plaisir dans la recherche de problèmes ; pour certains, on apprend les mathématiques en vue de résoudre des problèmes, pour d'autres, résoudre des problèmes est la voie d'accès au monde mathématique. Si tel ou tel de ces aspects a pu être dominant lors du choix du métier d'enseignant, il importe que les deux soient présents dans son exercice.

Les deux paragraphes qui suivent développent cette double vision.

## Enseigner les mathématiques – résoudre des problèmes

### Résolution de problèmes : trois exemples

On trouve dans la littérature pédagogique des essais de classification des exercices et problèmes selon l'activité souhaitée pour l'élève ou le professeur. Les ouvrages de Georges Polyá restent des incontournables en la matière. On pourra aussi consulter utilement la grille proposée il y a plus de vingt ans dans le *Livre du problème* de l'IREM de Strasbourg.

Il est souhaitable que, durant l'année, soient abordés tous les types d'exercices ou problèmes (en relevant éventuellement avec les élèves les oppositions et les complémentarités entre ces types) : problèmes balisés ou problèmes plus ouverts ; problèmes pour la classe ou problèmes pour l'examen ; problèmes d'un jour ou problèmes d'un mois... On réfléchira à la diversité des questions que l'on peut poser : explorer, formuler une

conjecture, la démontrer ou la réfuter par un contre-exemple, généraliser un résultat, percevoir l'analogie entre des problèmes apparemment distincts, supprimer une hypothèse dans un problème, chercher une nouvelle démonstration d'une propriété et la comparer avec d'autres peuvent servir de trame au travail mathématique dans la classe. Dans les choix de problèmes, on pourra privilégier ceux qui permettent de croiser les divers secteurs des mathématiques, tels ceux développés dans les trois exemples qui suivent.

### Exemple 1. De l'art de « moyenner »

(Activité pouvant prendre la forme d'énoncés pour des devoirs à la maison.)

#### Intentions

- Activités adaptées au début de l'année.
- Révision de connaissances de base (les courbes de fonctions de référence, des inégalités élémentaires...).
- Modélisation de situations élémentaires.
- Passage de l'imprécision relative du langage usuel à la nécessité de définitions univoques.
- Illustrations géométriques de définitions analytiques.
- Ouverture à un thème transversal des mathématiques...

Résumer deux ou plusieurs valeurs numériques en une seule, c'est en cela que consiste l'opération « prendre la moyenne ». Il existe de nombreuses façons de prendre ainsi la moyenne.

#### Partie I. Exemples

- 1) Calculez la vitesse moyenne sur un trajet de 200 km,
  - a) sachant que vous avez roulé la moitié du temps à 120 km/h et l'autre moitié à 80 km/h ;
  - b) sachant que vous avez roulé sur 100 km à 120 km/h, puis à 80 km/h.
  
- 2) Vous avez acheté un vendredi avant les vacances à votre banque 500 livres (sterling) à 1,636 € la livre, puis le dimanche suivant à l'hôtel 500 livres à 1,640 € la livre.
  - a) Quel est le taux moyen de la livre sur l'ensemble de ces deux transactions ?
  - b) Fin des vacances. Il vous reste des livres et vous les revendez : une première fois à 1,630 € la livre et vous obtenez 20 €, une deuxième fois à 1,628 € la livre et vous obtenez encore 20 €. Quel est le taux moyen de la livre sur l'ensemble de ces deux nouvelles transactions ?
  
- 3) Un rectangle a deux côtés de dimensions respectives 5 et 7. Comment définir la « moyenne »  $c$  de ces deux dimensions, de façon que le carré de côté  $c$  ait la même aire que le rectangle de départ ?
  
- 4) Deux carrés ont des côtés de dimensions respectives 5 et 7. Comment définir la « moyenne »  $c$  de 5 et 7 de façon que le carré de côté  $c$  ait une aire moyenne arithmétique des aires des deux carrés de départ ?

#### Partie II. Moyennes de deux réels strictement positifs $a$ et $b$

Définitions : pour deux réels  $a$  et  $b$  strictement positifs, on définit :

- la moyenne *arithmétique*  $m = \frac{a+b}{2}$  (c'est le sens usuel du mot « moyenne ») ;
- la moyenne *harmonique*  $h$  telle que son inverse soit moyenne arithmétique des inverses de  $a$  et  $b$  :  $\frac{1}{h} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$  ;
- la moyenne *géométrique*  $g = \sqrt{ab}$  ;
- la moyenne *quadratique*  $q$  telle que son carré soit la moyenne arithmétique des carrés de  $a$  et  $b$ .

- 1) a) Exprimer  $h$  et  $q$  en fonction de  $a$  et  $b$ .  
 b) De quelle moyenne s'agit-il dans chacun des six exemples ci-dessus ?  
 c) Prouver que, pour deux réels  $a$  et  $b$  strictement positifs tels que  $a < b$ , on a :  

$$0 < a < h < g < m < q < b.$$
 Que se passe-t-il si  $a = b$  ?  
 d) Étendre les définitions précédentes à trois réels strictement positifs  $a, b$  et  $c$ .

2) Moyenne associée à une fonction

- a) Représenter dans le même repère les fonctions carré et inverse définies sur  $]0 ; +\infty[$ .
- b) Placer deux réels  $a$  et  $b$  strictement positifs sur l'axe des abscisses. Utiliser alors le dessin pour placer les moyennes  $h$  et  $q$  de  $a$  et  $b$ , à l'aide des seules constructions élémentaires suivantes (que l'on précisera) :
  - construction de l'image d'un réel par une fonction  $f$  représentée graphiquement ;
  - construction de l'antécédent d'un réel par une fonction  $f$  représentée graphiquement ;
  - construction de la demi-somme ou moyenne arithmétique de deux réels représentés sur un même axe.
- c) Toute moyenne peut ainsi être associée à une fonction  $f$  : le réel  $c$  est « *moyenne au sens de  $f$*  » de  $a$  et  $b$  si on a  $f(c) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$  (cela n'a de sens que si  $f$  vérifie certaines « bonnes » propriétés, non étudiées ici : à savoir fonction strictement monotone et bijective).

Ainsi :

- la moyenne harmonique est associée à la fonction inverse ;
  - la moyenne quadratique à la fonction carré ;
  - la moyenne arithmétique à la fonction identité ;
  - la moyenne géométrique à la fonction logarithme (qui sera étudiée cette année).
- Comment pourrait-on définir une moyenne « cubique » ?

3) Illustrations géométriques

Dans chacune des figures ci-contre, représentant un trapèze ABCD, on pose  $AB = a$  et  $CD = b$ . (MN) est parallèle à (AB).

Prouver que MN représente la moyenne de  $a$  et  $b$  :

- arithmétique dans la figure 1 ;
- géométrique dans la figure 2 ;
- harmonique dans la figure 3 ;
- quadratique dans la figure 4.

Figure 1: M milieu de [AD]

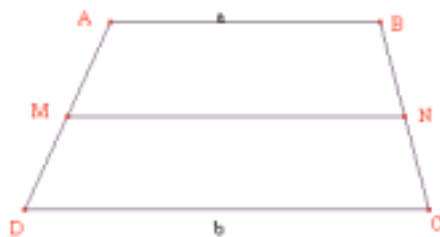


Figure 2: AENM et NCDM sont semblables

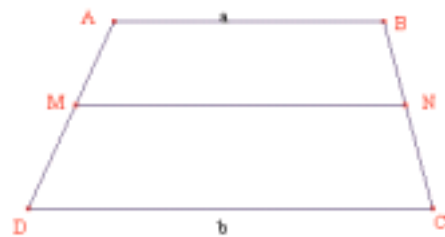


Figure 3: (MN) passe par le point d'intersection des diagonales

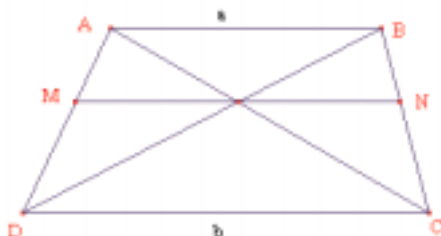
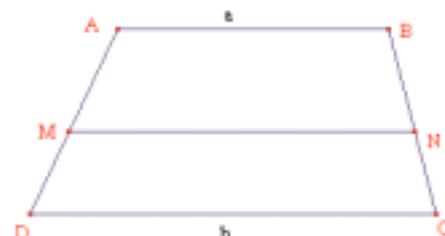


Figure 4: AENM et MNCD ont même aire



*Remarques* – On peut aussi, au lieu de donner les quatre figures, les faire construire (tout au moins les figures 1, 2 et 3). Dans ce cas, il faudra d’abord assurer l’existence de  $M$  pour chacune des quatre moyennes demandées ; ceci pourrait être fait en cours en usant d’un argument de continuité : quand  $M$  décrit le segment  $[AD]$  de  $A$  vers  $D$ , la longueur  $MN$  croît continûment de  $a$  à  $b$  et prend donc une fois et une seule chacune des valeurs  $m, g, h$  et  $q$ .

– Cette notion de *moyenne* se retrouve en statistiques, en probabilité (espérance mathématique, écart-type), dans le calcul barycentrique. Elle est également présente en calcul intégral, à propos de valeur moyenne d’une fonction sur un segment ; mais, en passant du discret au continu, on change de dimension.

## Exemple 2. Le problème de la duplication du cube

*(Celui-ci pourra servir de trame à plusieurs séances de travail.)*

La duplication du cube est l’un des trois principaux problèmes non résolus des mathématiques grecques (les deux autres étant la quadrature du cercle et la trisection d’un angle). Problème posé au moins cinq siècles avant J.-C., il n’a été vraiment résolu qu’au XIX<sup>e</sup> siècle, lorsqu’on a su caractériser les équations polynomiales résolubles à l’aide des quatre opérations et des extractions de racines.

Ce problème a suscité de nombreux travaux ainsi que la construction d’instruments (règles de Platon, *mésolabe* d’Érathostène...) adaptés à déterminer en pratique des solutions approchées. On développe ci-dessous quelques éléments de cette longue histoire, choisis parce qu’ils permettent entre autres :

- de réfléchir sur la notion de solution exacte ou approchée, tant en géométrie qu’en analyse ;
- d’utiliser les propriétés des triangles semblables ;
- de découvrir une intervention de la continuité ;
- de faire apparaître une fonction dont on peut faire une étude conventionnelle ;
- d’approcher un nombre réel par deux suites adjacentes de nombres rationnels ;
- de croiser les points de vue numérique, analytique et géométrique.

### Partie I. Un texte attribué à Ératosthène

« Ératosthène au roi Ptolémée, salut.

On raconte qu’un ancien auteur tragique met en scène Minos faisant préparer une tombe pour Glaucôn. Ayant appris que de chaque côté, elle avait cent pieds, il dit : « Tu as désigné certes un petit enclos pour la tombe d’un roi ; qu’il soit double ; sans détruire ses belles proportions, double donc au plus tôt chaque côté de la tombe. »

Il s’est visiblement trompé : en effet, si l’on double les côtés, la figure plane devient quadruple, le solide, huit fois plus grand. Mais, même chez les géomètres, on recherchait de quelle manière on pourrait doubler le solide donné en lui conservant la même figure. Et ce problème était appelé la duplication du cube ; en effet s’étant donné un cube, ils cherchaient à le doubler.

Tandis que tous hésitaient depuis longtemps, Hippocrate de Chio le premier trouva que, si entre deux droites données, dont la plus grande est double de la plus petite, on parvient à obtenir deux moyennes proportionnelles en proportion continue, la duplication du cube sera obtenue ; et ainsi, son hésitation se transforma en une autre hésitation non moins grande.

Quelque temps après, dit-on, certains habitants de Délos, ayant reçu d’un oracle l’ordre de doubler un des autels, tombèrent dans la même hésitation. Ils envoyèrent donc demander aux géomètres qui étaient auprès de Platon, dans l’Académie, de trouver pour eux la solution... »

D’après Dedron P. et Itard J., *Mathématiques et mathématiciens*, Magnard, 1972, qui soulignent le caractère non confirmé de cette source.

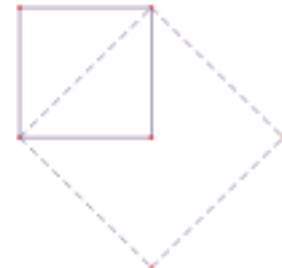
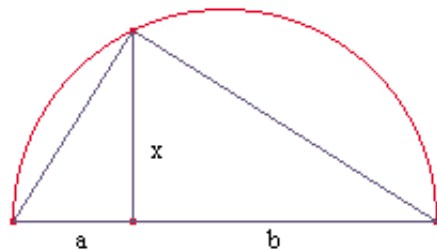
*Explication de texte – Le nombre chez les Grecs*

En notations modernes, construire un cube de volume double de celui d’un cube de côté  $a$  donné revient à chercher le côté  $x$  tel que  $x^3 = 2a^3$ ,  $a$  étant le côté du cube initial.

Pour les Grecs, un nombre est avant tout un rapport de longueurs ; construire un nombre donné, c’est donc construire deux segments (« droites » dans le texte ci-dessus)

dans le rapport voulu, les seules constructions permises se faisant à la règle et au compas. Une « droite »  $x$  est moyenne de deux autres « droites »  $a$  et  $b$  si  $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$  ;  $x$  est alors moyenne géométrique de  $a$  et  $b$  ; la construction est simple à la règle et au compas : voir la figure à gauche ci-dessous utilisant la similitude des deux triangles rectangles intérieurs.

La duplication du carré se résout facilement : voir figure à droite avec la diagonale du carré de côté  $a$ .

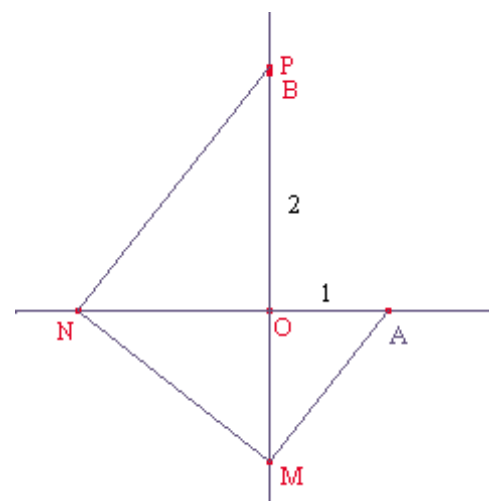
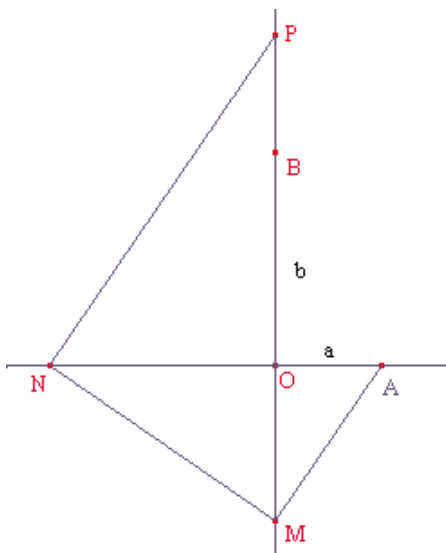


Insérer deux moyennes proportionnelles, comme le propose Hippocrate de Chio, entre deux longueurs données  $a$  et  $b$ , c'est chercher deux autres longueurs  $x$  et  $y$  telles que  $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$  ; on a alors  $\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \times \frac{x}{y} \times \frac{y}{b} = \frac{a}{b}$ , soit avec  $a = 1$  et  $b = 2$ ,  $x = \sqrt[3]{2}$ .

Une solution attribuée à Platon (utilisation d'un principe de continuité)

Figure 1

Figure 2

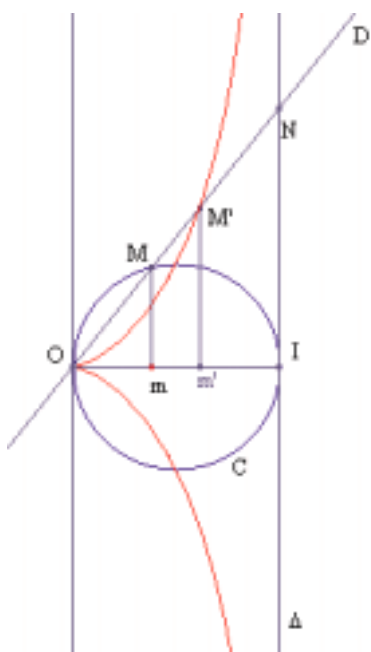


Sur la figure 1, à partir de A et M sur les droites perpendiculaires (OA) et (OB), on construit la perpendiculaire en M à AM qui coupe (OA) en N, puis la perpendiculaire en N à (MN) qui coupe (OB) en P. On a alors  $\frac{OA}{OM} = \frac{OM}{ON} = \frac{ON}{OP}$  ; on a ainsi inséré deux moyennes proportionnelles OM et ON entre OA et OP.

Sur le plan théorique, en déplaçant M continûment sur sa demi-droite, le point P parcourt toute la demi-droite [OB] : il passe une fois et une seule par toute position donnée sur cette demi-droite. Il y a là l'intervention intuitive d'un principe de continuité, qui assure l'existence d'une position M pour laquelle P est confondu avec B (figure 2) ; alors  $OM = \sqrt[3]{2}$ .

En pratique, Platon a conçu un instrument s'appuyant sur le schéma ci-dessus ; du point de vue des Grecs, cette méthode fournit une approximation de la solution (l'existence théorique de la solution posant un problème crucial), mais aucune construction à la règle et au compas n'a pu (et pour cause) être trouvée.

Aujourd'hui, un logiciel de géométrie dynamique permet d'avoir l'impression de déplacer continûment le point M (en fait, on le déplace pas à pas et on s'arrête lorsque la précision de dessin ne permet plus de distinguer B et P) ; mais, il ne s'agit que d'une solution approximative. Pour une solution exacte au sens de la constructibilité à la règle et au compas, les points doivent être obtenus par intersection de deux droites, de deux cercles ou d'une droite et d'un cercle au terme d'une construction ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'étapes. On trouvera d'autres indications sur les problèmes de constructibilité dans le document d'accompagnement de l'option facultative de la série L.



### Partie II. Une solution de Dioclès : à l'aide de la cissoïde

On se donne ci-contre un cercle de diamètre [OI] (on peut supposer  $OI = 1$ ) et la perpendiculaire  $\Delta$  à (OI) en I. On fait tourner une droite D autour du point O : elle coupe le cercle en un deuxième point M et la droite  $\Delta$  en N ; à tout point M, on fait correspondre le point M' de [ON] tel que  $NM' = OM$ . Le lieu du point M' quand M décrit le cercle est appelé cissoïde de Dioclès. (Cette courbe a été effectivement introduite par Dioclès – II<sup>e</sup> siècle avant J.-C. – pour résoudre le problème de la duplication du cube.)

L'équation de la cissoïde (dans le repère (O, I, J) s'obtient en utilisant les triangles semblables.

On a :  $Mm^2 = Om \cdot mI$  (car OMI est rectangle en M),  
 $= Om \cdot Om'$  (car  $OM' = MN$ , donc  $Om' = mI$ ).

D'où  $\frac{Om'}{Om} = \frac{Mm^2}{Om^2} = \frac{M'm'^2}{Om'^2}$  et  $\frac{Om^3}{Om} = M'm'^2$ .

En notant  $x = Om'$  et  $y = M'm'$ , on a  $Om = m'I = 1 - x$  et obtient l'équation de la cissoïde :  $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$ .

Dans le cas où M' est « au-dessus », on peut alors étudier la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$  (cas intéressant de fonction dans laquelle intervient une fonction composée avec  $\sqrt{\quad}$  ; la recherche de la dérivée en 0 – élémentaire au demeurant – peut se faire en revenant à la définition même de nombre dérivé en un point).

Pour obtenir une construction de  $\sqrt[3]{2}$ , il suffit maintenant de placer sur un axe perpendiculaire en O à (OI) le point B tel que  $OB = 2$ .

Au plan théorique, soit M' le point d'intersection de (IB) et de la cissoïde.

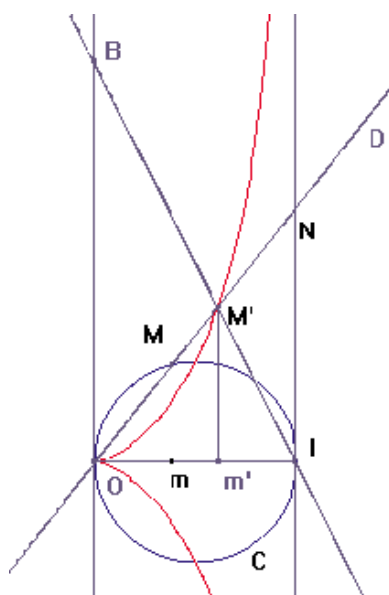
On avait obtenu ci-dessus :  $\frac{Om'}{Om} = \frac{Mm^2}{Om^2} = \frac{M'm'^2}{Om'^2}$ .

On a maintenant de plus  $\frac{Im'}{1} = \frac{M'm'}{2}$ .

D'où  $Om = Im' = \frac{M'm'}{2}$  et donc  $\frac{2Om'}{M'm'} = \frac{M'm^2}{Om'^2}$ ,

d'où enfin  $2 = \frac{M'm'^3}{Om'^3} = \frac{IN^3}{OI^3} = \frac{IN^3}{1}$  et donc  $IN = \sqrt[3]{2}$ .

On montre ainsi l'existence de la solution ; toutefois, on ne peut tracer qu'un nombre fini de points de la cissoïde et il s'agit, là aussi, d'une solution approchée.





### Partie III. Approche de $\sqrt[3]{2}$ par des suites adjacentes

Pour les Grecs, il s'agissait de construire à la règle et au compas une longueur ; les nombres irrationnels sont venus enrichir les ensembles de nombres connus et d'autres questions se sont posées, dont celles de l'irrationalité et de l'approximation rationnelle de  $\sqrt[3]{2}$ .

#### Approximation décimale

La fonction cube est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  ; elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  ; le réel 2 a donc un antécédent unique  $\sqrt[3]{2}$  que l'on peut approcher, en l'encadrant – à l'aide de balayages successifs – par des décimaux, les calculs se faisant avec la calculatrice.

On obtient ainsi successivement :

$$\begin{aligned} 1 &< \sqrt[3]{2} < 2 && \text{(car } 1^3 < 2 < 2^3) \\ 1,2 &< \sqrt[3]{2} < 1,3 && \text{(car } 1,2^3 = 1,728 < 2 < 1,3^3 = 2,197) \\ 1,25 &< \sqrt[3]{2} < 1,26 && \text{(car } 1,25^3 = 1,953125 < 2 < 1,26^3 = 2,000376) \\ &\dots && \end{aligned}$$

#### Ce point de convergence peut-il être rationnel ?

On peut dans un premier temps se poser simplement la question :  $\sqrt[3]{2}$  est-il décimal ?

Si  $\sqrt[3]{2}$  était rationnel de la forme  $\frac{p}{q}$ , avec  $\frac{p}{q}$  irréductible, on aurait alors  $p^3 = 2q^3$ ,  $p^3$  et donc  $p$  seraient pairs, puis  $q$  aussi et donc la fraction ne serait pas irréductible.

#### Deux suites adjacentes convergeant vers $\sqrt[3]{2}$

Il s'agit des deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_0 = 2$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$  et  $v_n = \frac{2}{u_n^2}$  pour tout  $n$ .

Preuve :

1) Pour tout  $n$ ,  $u_n^2 v_n = 2$  ; d'où :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{u_{n+1}^2} = \frac{u_{n+1}^3 - 2}{u_{n+1}^2} = \frac{u_{n+1}^3 - u_n^2 v_n}{u_{n+1}^2} = \frac{(2u_n + v_n)^3 - 27u_n^2 v_n}{27u_{n+1}^2} = \dots = \frac{(u_n - v_n)^2 (8u_n + v_n)}{27u_{n+1}^2} \quad (1)$$

et donc  $u_n \geq v_n$  pour tout  $n \geq 1$ . L'inégalité est vérifiée pour  $n = 0$ .

2) Pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \leq 0$ , d'où  $(u_n)$  est décroissante.

3) Pour tout  $n$ ,  $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{u_{n+1}^2} - \frac{2}{u_n^2} = \frac{2(u_n - u_{n+1})(u_n + u_{n+1})}{(u_{n+1}u_n)^2} \geq 0$ , d'où  $(v_n)$  est croissante.

4) D'où, pour tout  $n$ ,  $8u_n + v_n \leq 9u_0 = 18$  et  $27u_{n+1}^2 \geq 27v_n^2 > 27$  (on a en effet  $v_2 = 1458/1225$ , soit  $v_2 > 1$ )

et d'après (1), pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{2}{3}(u_n - v_n)^2 \leq \frac{2}{3}(u_n - v_n)$  (on a  $0 \leq u_n - v_n < 1$  car  $1 \leq v_n \leq u_n \leq 2$  pour tout  $n \geq 2$ ). Par récurrence, pour  $n \geq 2$ ,  $u_n - v_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$  et donc  $(u_n - v_n)$  converge vers 0.

5) Les deux suites sont donc adjacentes ; elles convergent vers une même limite  $a$  telle que  $a^3 = 2$ .

Remarque – On crée ainsi deux suites de rationnels convergeant vers  $\sqrt[3]{2}$  :

$$2, \frac{3}{2}, \frac{35}{27}, \frac{125116}{92225}, \dots \text{ pour } (u_n) \text{ et } \frac{1}{2}, \frac{8}{9}, \frac{1458}{1225}, \dots \text{ pour } (v_n).$$

La convergence est très rapide ; la majoration  $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{2}{3}(u_n - v_n)^2$  montre que si l'encadrement de  $\sqrt[3]{2}$  est d'amplitude  $10^{-n}$  au rang  $n$ , il est d'amplitude inférieure à  $10^{-2n}$  au rang suivant.

### D'où viennent ces deux suites ?

C'est une extension de la méthode dite de Héron pour approcher  $\sqrt{2}$  à l'aide de deux suites adjacentes de rationnels  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$  et  $v_n = \frac{2}{u_n}$  avec  $u_0 = 2$ .

C'est une application de la méthode de Newton d'approximation du zéro de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 - 2$  ; dans cette méthode, on utilise la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0$  et la relation de récurrence

$u_{n+1} = g(u_n)$  où  $g$  est définie par  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  ( $g$  a donc  $\sqrt[3]{2}$  pour point fixe) ; ici,

$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3 - 2}{3u_n^2} = \frac{1}{3} \left( 2u_n + \frac{2}{u_n^2} \right)$  ; on retrouve les suites adjacentes ci-dessus en posant  $v_n = \frac{2}{u_n}$ . On

peut aussi travailler directement sur la suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = g(u_n)$ , illustrer le comportement de la suite à l'aide de la représentation graphique de  $g$  et prouver qu'elle est décroissante et minorée...

### Exemple 3. La suite de Fibonacci

*(Plus approprié aux élèves suivant l'enseignement de spécialité.)*

La suite de Fibonacci  $(F_n)$  est définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ , et pour tout  $n \geq 0$ ,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (1).$$

Elle figure dans le *Liber Abaci* composé en 1202 par Léonard de Pise, dit Fibonacci, dans le cadre d'une récréation mathématique, puisque cette suite modélisait la croissance d'une famille fictive de lapins sur une île déserte. Il ne s'agissait sans doute pour Fibonacci que de la présentation amusante d'une mise en équations (d'ailleurs assez subtile), mais il est piquant de constater que la relation (1) a été utilisée par les démographes modernes (comme Alfred Lotka) dans la théorie des populations stables, et que la suite de Fibonacci joue un rôle dans la géométrie de la croissance des plantes (répartition des feuilles sur une tige, des étamines, etc.).

#### Intentions

Il ne s'agit pas ici d'inciter à l'étude des suites récurrentes d'ordre 2 (leur étude systématique n'est pas au programme), mais simplement de s'appuyer sur un sujet attrayant, d'un abord facile, riche de développements dans des domaines divers (numérique, algébrique, analytique, géométrique) et ayant un caractère culturel notoire. Certains aspects de ce sujet ont été développés dans le document d'accompagnement de l'option de terminale L, auquel on pourra aussi se référer. Parmi les items suivants, certains pourront servir d'application directe du cours, d'autres de support à une recherche personnelle autonome, d'autres enfin – plus difficiles – de prolongement facultatif pour des élèves motivés. Les paragraphes III et V.2 ne concernent que les élèves suivant l'enseignement de spécialité.

#### I. Expérimentations numériques

Calcul des premiers termes à la main, puis avec une calculatrice programmable ou un tableur.

Calcul des quotients de deux termes consécutifs ; conjecture.

## II. Démonstration par récurrence d'identités algébriques

Par exemple :

$$\begin{aligned} F_0 + F_1 + \dots + F_n &= F_{n+2} - 1 \\ F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 &= F_n F_{n+1} \\ F_n^2 &= F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1} \end{aligned} \quad (2)$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (3)$$

*Remarque* – Cette dernière identité pourra être motivée par la recherche de suites géométriques vérifiant la relation (1). Une expérience frappante consiste à observer le comportement sur tableur ou calculatrice de ces deux suites en fonction du mode de calcul de leurs termes successifs ( $u_{n+1} = q u_n$  ou  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ ).

## III. Propriétés arithmétiques

Deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.

Cela découle de la formule (2) et du théorème de Bezout, ou bien de l'application de l'algorithme d'Euclide.

L'algorithme d'Euclide appliqué à  $F_{n+1}$  et  $F_n$  aboutit en  $n$  étapes ( $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ;  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ; ...;  $F_3 = F_2 + F_1$ ;  $F_2 = F_1$ ). Tous les quotients étant égaux à 1,  $F_{n+1}$  est le plus petit entier naturel pour lequel l'algorithme *marche* ainsi en  $n$  étapes (en effet, soit  $u_1$  et  $u_2$  deux entiers naturels avec  $u_1 > u_2$  tels que l'algorithme *marche* en  $n$  étapes; on a alors  $u_1 = q_1 u_2 + u_3$ ;  $u_2 = q_2 u_3 + u_4$ ; ...;  $u_n = q_n u_{n+1}$  avec  $u_k > u_{k+1} > 0$  et  $q_k \geq 1$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$ ; on en déduit immédiatement  $u_1 \geq F_{n+1}$ ).

Si  $n$  divise  $p$ , alors  $F_n$  divise  $F_p$ .

On pourra remarquer pour cela que la suite des congruences modulo  $F_n$  obéit également à la formule (1); on en déduit par récurrence d'abord que, pour tout  $r$ ,  $F_{n+r} \equiv F_{n+1} F_r$  (modulo  $F_n$ ), ensuite que pour tout  $k$ ,  $F_{kn} \equiv 0$  (modulo  $F_n$ ).

On pourra approfondir ce résultat en montrant que plus généralement, le P.G.C.D. de deux termes  $F_n$  et  $F_p$  est  $F_d$ , où  $d$  est le P.G.C.D. de  $n$  et  $p$ . Pour cela, on pourra d'abord montrer la formule suivante :

$$\text{pour } n \geq k, F_n F_{k+1} - F_k F_{n+1} = (-1)^k F_{n-k}.$$

On écrira ensuite  $d = an - bp$  et on utilisera cette formule pour écrire  $F_d$  comme combinaison à coefficients entiers de  $F_{an}$  et  $F_{bp}$ , puis de leurs diviseurs  $F_n$  et  $F_p$ . Puisque de plus  $F_d$  divise  $F_n$  et  $F_p$ , il s'ensuit que c'est leur P.G.C.D.

## IV. Deux suites adjacentes convergeant vers le nombre d'or

Pour  $n \geq 1$ , soit  $R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ . Montrer que  $R_{n+1} = f(R_n)$ , où  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ . En déduire que la suite des termes de rang impair est croissante, que la suite des termes de rang pair est décroissante, que ces deux suites sont adjacentes et qu'elles ont pour limite commune le nombre  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

On pourra faire le lien avec le développement en fraction continue de  $\Phi$  (voir le document d'accompagnement de l'option facultative de terminale L). Notons que le fait que les termes successifs de ce développement en fraction continue soient les plus petits possibles (car tous égaux à 1) implique que  $\Phi$  et ses équivalents sont les nombres réels qui s'approchent quantitativement le plus mal par des rationnels (voir par exemple : Hardy G. H., Wright E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5<sup>e</sup> édition, Oxford Science Publications, 2000).

## V. Aspects géométriques

Géométrie du pentagone régulier et nombre d'or : voir le document d'accompagnement de l'option facultative de terminale L

Il est nécessaire de montrer d'abord que  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .

Pour cela, on remarque que  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  est la partie réelle de  $e^{\frac{2i\pi}{5}}$  et que ce nombre est racine de l'équation  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ . On divise alors cette équation par  $z^2$ , puis on remarque que  $z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2$ , donc que  $2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  est racine de l'équation  $u^2 + u - 1 = 0$ , d'où sa valeur.

### Similitude et rectangle d'or

Par construction (figure 1 ci-dessous où le cercle en pointillés est centré en le milieu de [AO]), la longueur AB vaut  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , soit le nombre d'or, noté  $\Phi$ .

Sur la figure 2, on construit alors le rectangle ABCD de côté 1 et  $\Phi$  (que l'on peut qualifier de *rectangle d'or*), puis par adjonction du carré DCEF le rectangle ABEF de côté  $\Phi$  et  $1 + \Phi = \Phi^2$ .

Les deux rectangles ABCD et ABEF sont directement semblables : la similitude  $\sigma$  transformant A, B, C et D respectivement en B, E, F et A a pour rapport  $\Phi$  et pour angle  $-\frac{\pi}{2}$  (dans le cas de la figure 2).

Le centre  $\Omega$  de  $\sigma$  vérifie  $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = (\vec{\Omega D}, \vec{\Omega A}) = -\frac{\pi}{2}$  : il se trouve alors à l'intersection des cercles de diamètres respectifs [AB] et [AD].

Mais  $\Omega$  vérifie aussi et de même  $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega E}) = (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) + (\vec{\Omega B}, \vec{\Omega E}) = -\pi$  : il se trouve donc aussi à l'intersection de (AE) et (BD).

Figure 1

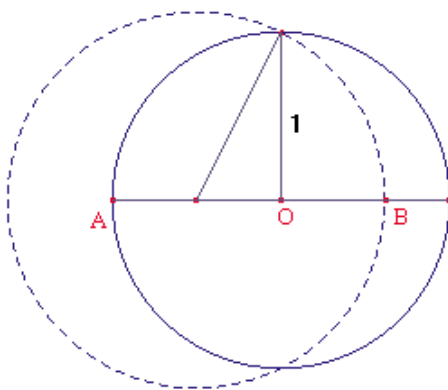
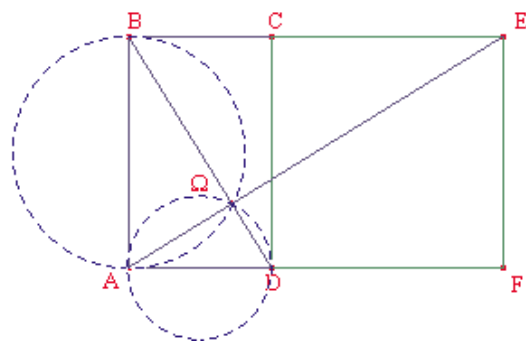


Figure 2



On peut à nouveau adjoindre un carré (de côté  $\Phi^2$ ) au rectangle ABEF : on obtient un nouveau *rectangle d'or* BEGH de côté  $\Phi^2$  et  $\Phi^3$ , se déduisant du précédent par la même similitude.

En répétant le processus, on construit ainsi une suite de *rectangles d'or* de côtés  $\Phi^n$  et  $\Phi^{n+1}$ , déduits les uns des autres par la même similitude de centre  $\Omega$  ; les images successives de A et D se situent toutes sur deux droites perpendiculaires en  $\Omega$ .

On pave ainsi le plan avec un *rectangle d'or* initial de côtés 1 et  $\Phi$  et des carrés de côté  $\Phi^n$ .

Figure 3

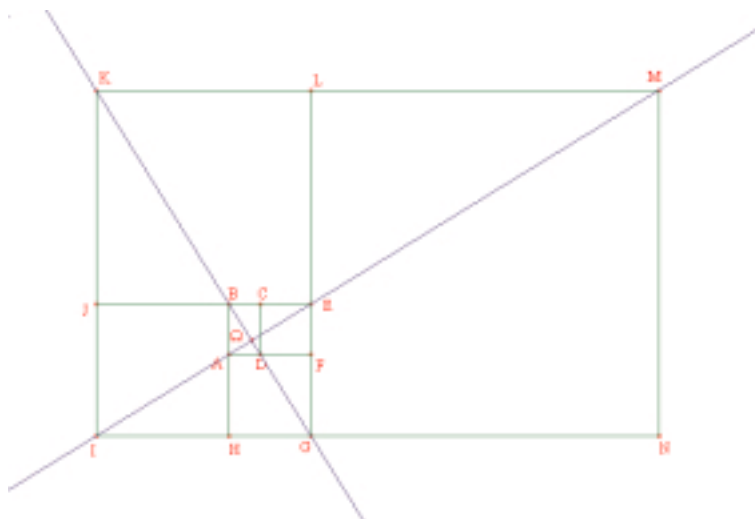
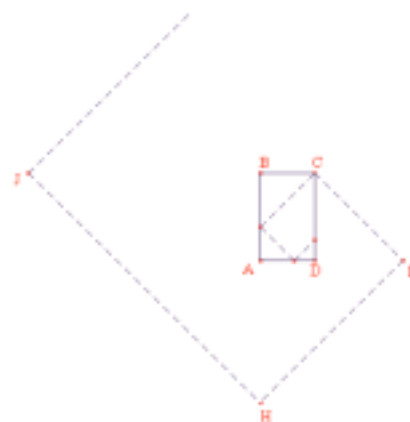


Figure 4



On peut aussi s'intéresser aux images successives du point C par la similitude précédente ou par la similitude réciproque (figure 4).

Par cette deuxième, la ligne brisée partant de C et s'enroulant autour de  $\Omega$  a pour longueur  $\sqrt{2}(1 + \Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \dots)$  de limite  $\Phi^2\sqrt{2}$ .

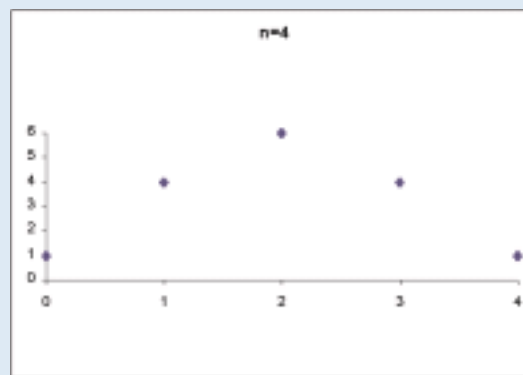
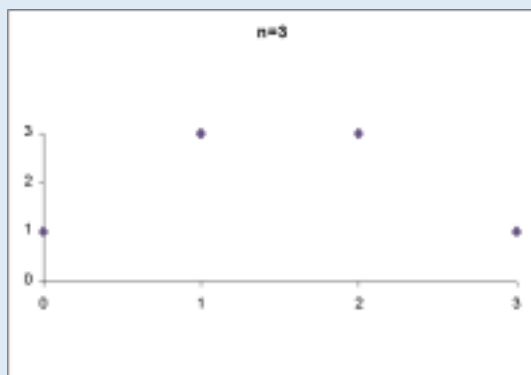
### Expérimenter en mathématiques

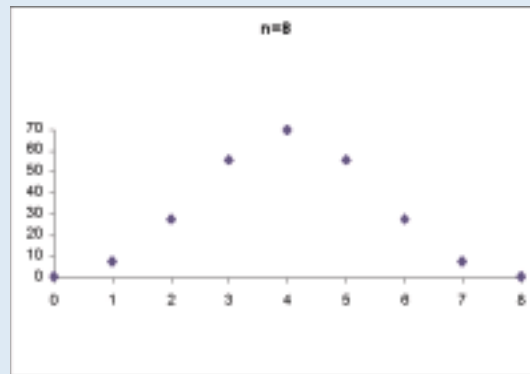
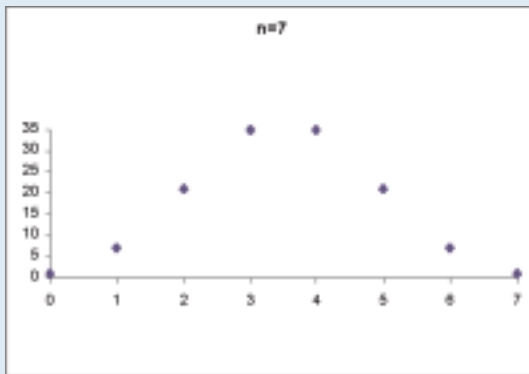
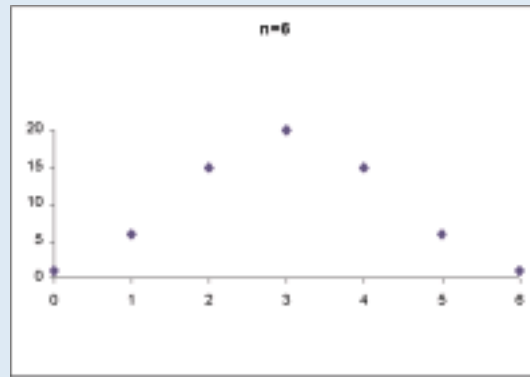
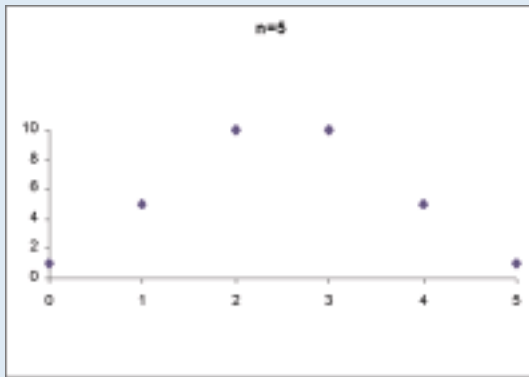
Les possibilités d'expérimentation numérique et de représentations graphiques ouvrent à de nombreuses problématiques nouvelles.

Voici un cas où la simple question « Comment représenter graphiquement les coefficients binomiaux ? » conduit à conjecturer des résultats inattendus... et à introduire la fonction  $\exp(-x^2)$ .

Dans bien des questions, en particulier en probabilités, il est intéressant d'avoir une idée du comportement des coefficients binomiaux  $\binom{n}{p}$  en fonction de  $p$ , pour  $n$  fixé et grand.

On peut commencer par quelques exemples simples. La formule :  $\binom{n}{p+1} = \frac{n-p}{p+1} \binom{n}{p}$  montre que  $\binom{n}{p+1}$  est plus grand que  $\binom{n}{p}$  si  $n-p \geq p+1$ , c'est-à-dire si  $p \leq (n-1)/2$ . Donc, pour  $n$  fixé, les coefficients binomiaux augmentent à partir de 1, puis diminuent. On a montré ci-dessous les graphiques de  $\binom{n}{p}$  en fonction de  $p$ , pour  $n$  variant de 3 à 8 :

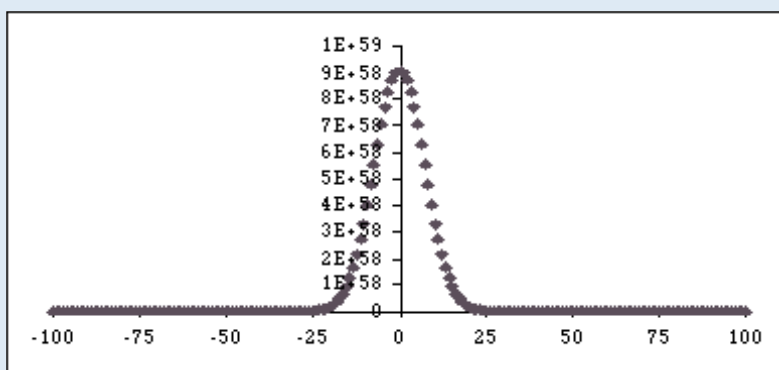




On voit que le dessin est toujours symétrique, reflétant la propriété bien connue :  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Il est plus agréable de regarder ce qui se passe pour des valeurs paires de  $n$  : on posera désormais  $n = 2K$  ; il y a alors un maximum unique  $\binom{2K}{K}$ , et on se restreindra désormais à ce cas (cela ne change pas grand chose pour  $n$  grand). Pour comparer les dessins, il est plus simple de placer l'origine du repère au maximum de la courbe, en posant  $i = p - K$ , c'est-à-dire de tracer, non pas  $\binom{2K}{p}$  mais  $\binom{2K}{K+i}$ , de sorte que le maximum est obtenu pour  $i = 0$ , avec  $i$  variant de  $-K$  à  $K$ .

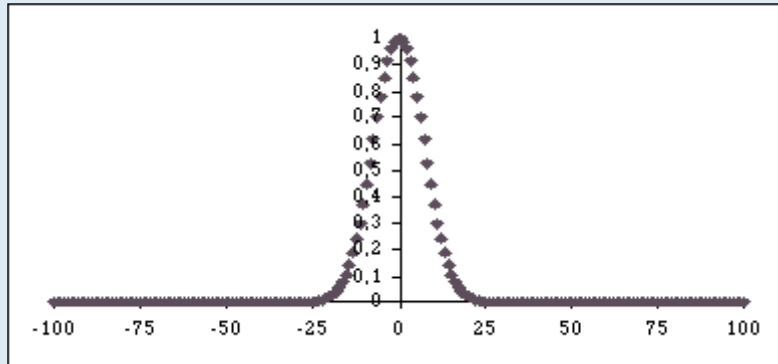
Voici la figure obtenue pour  $K = 100$  :



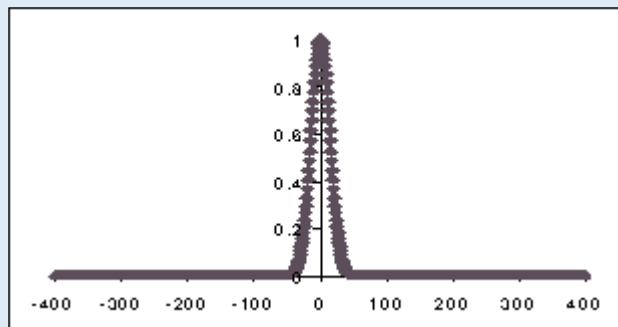
Les nombres obtenus au centre du dessin sont énormes, et de plus en plus grands quand  $n$  augmente, donc difficiles à comparer ; il est plus commode de normaliser, en divisant à chaque fois par le plus

grand coefficient binomial  $\binom{2K}{K}$ , pour obtenir des nombres qui varient entre 0 et 1. On va donc tracer  $\frac{\binom{2K}{K+i}}{\binom{2K}{K}}$  pour  $i$  variant de  $-K$  à  $K$ .

Voici la figure obtenue pour  $K = 100$  :

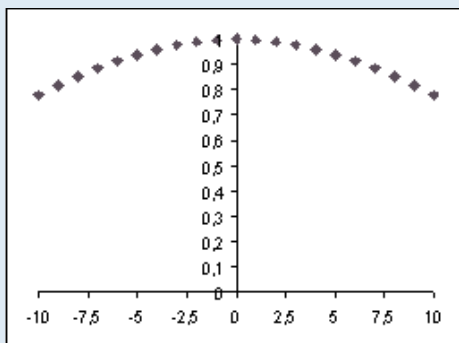


et pour  $K = 400$  :



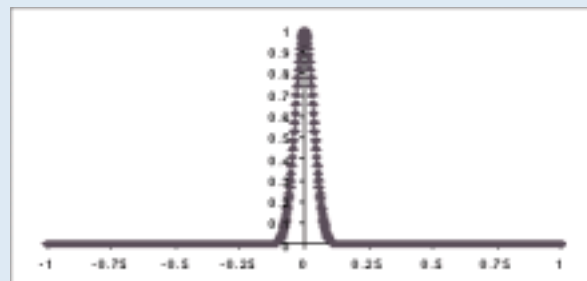
Ces dessins ne sont pas à la même échelle ; si on les trace à la même échelle, et qu'on essaie d'en dessiner la partie centrale (par exemple pour  $i$  allant de  $-10$  à  $10$ ), on voit que, quand  $K$  grandit, tous les coefficients tendent vers 1.

Voici le détail pour  $K = 400$  :



Il faut donc resserrer l'échelle quand  $K$  augmente ; une idée serait de diviser les abscisses par  $K$ , de sorte qu'on aille toujours de  $-1$  à  $1$ , c'est-à-dire de tracer les points  $\left( i / K ; \binom{2K}{k+i} / \binom{2K}{K} \right)$ . Cela ne marche pas très bien.

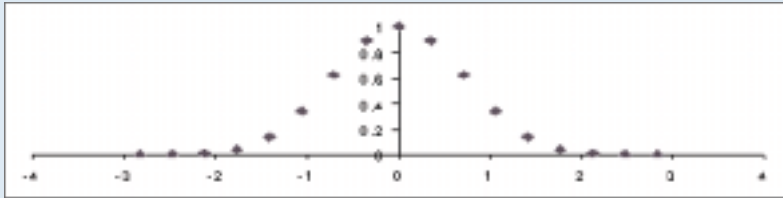
Voici le résultat obtenu pour  $K = 400$  :



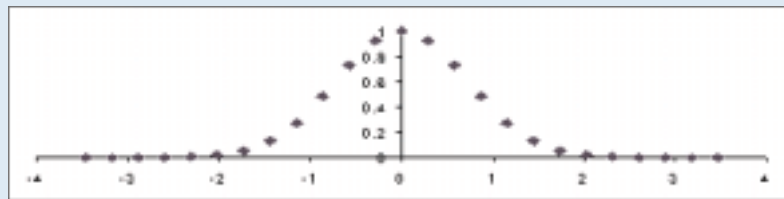
Si on continue, on va voir le graphe se resserrer de plus en plus vers l'axe des ordonnées, ce qui n'est pas très intéressant. Il faut donc resserrer un peu moins. On peut essayer diverses valeurs ; une idée est de chercher, pour  $K$  fixé, pour quelles valeurs de  $i$  la quantité  $\binom{2K}{K+i} / \binom{2K}{K}$

est significative, par exemple plus grande que  $0,5$ , c'est-à-dire de chercher la largeur de la partie significative qui est au centre du graphe. Quelques essais montrent que, si  $K$  est multiplié par 4, cette valeur est

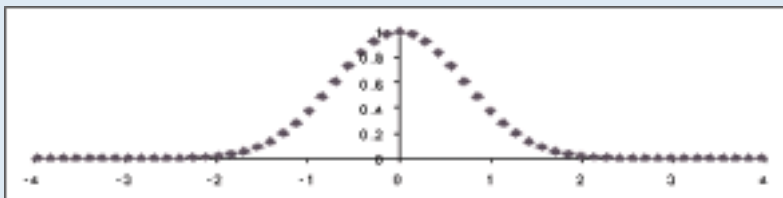
doublée ; d'où l'idée de diviser les abscisses, non par  $K$ , mais par  $\sqrt{K}$ , c'est-à-dire de représenter les points  $\left( i/\sqrt{K}; \binom{2K}{K+i} / \binom{2K}{K} \right)$ . Et c'est cela qui marche ; on vérifie que, bien que, pour chaque valeur de  $K$ , le graphe soit défini sur  $\left[ -K/\sqrt{K}; K/\sqrt{K} \right]$ , c'est-à-dire sur  $\left[ -\sqrt{K}; \sqrt{K} \right]$ , les valeurs obtenues sont pratiquement nulles en dehors de l'intervalle  $[-2; 2]$ , et que les courbes obtenues se ressemblent étrangement ! La convergence est très rapide, voici quelques courbes pour  $K = 8 ; 12 ; 50 ; 100 ; 400$  :



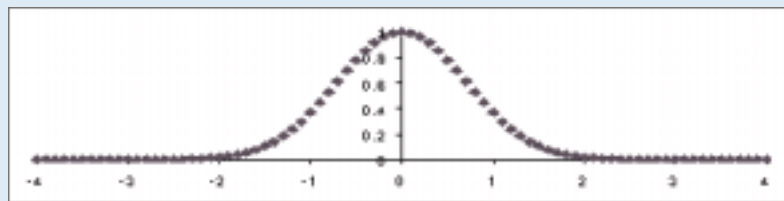
$K = 8.$



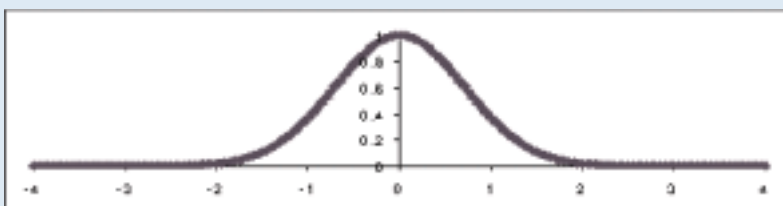
$K = 12.$



$K = 50.$



$K = 100.$



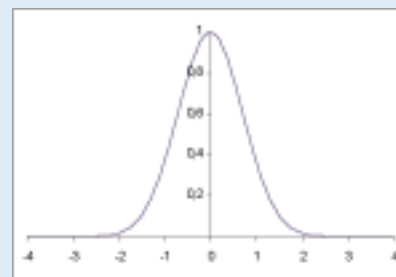
$K = 400.$

Ces points semblent dessiner une courbe précise : quelle est son équation ?

On constate expérimentalement que les coefficients binomiaux tendent à se répartir suivant une courbe précise, la fameuse courbe en cloche, représentation graphique de la fonction  $e^{-x^2}$  dessinée ci-dessous.

Mais pour en arriver à cette observation, on a dû faire des essais, procéder à des changements d'origine et d'échelle (comme on le fait couramment en physique pour se ramener à des unités adaptées), bref expérimenter !

On trouvera sur le cédérom deux démonstrations du phénomène observé ci-dessus.





## Mathématiques et modélisation

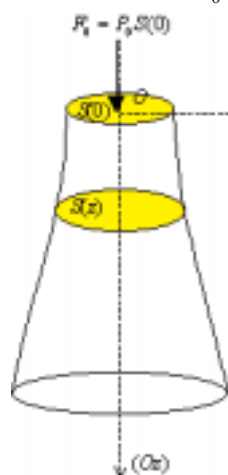
La modélisation est une pratique scientifique majeure, qui concerne un nombre croissant de domaines. Observer, simplifier, penser une situation à l'aide de concepts théoriques, représenter une évolution temporelle par une équation différentielle ou certains types de variabilité par des lois de probabilité, exigent au minimum de connaître les concepts, de savoir quelles propriétés ont certaines classes d'équations, quels types de calculs peuvent être faits sur des familles de lois de probabilité. Aussi est-il nécessaire d'étudier les concepts en jeu et d'acquérir des savoirs.

Modéliser est une des principales modalités de l'interaction entre les mathématiques et les autres sciences. Mais la pratique de la modélisation de situations réelles est difficile ; un exemple non trivial, concernant la durée de vie d'un noyau d'une substance radioactive, est proposé en annexe. Un exemple plus simple est le suivant.

### Exemple d'une pile de pont. Solide d'égalité de contrainte

On recherche le profil (supposé régulier, *i.e.* défini par une fonction continue) d'un solide homogène de révolution pour lequel on souhaite que la pression (appelée dans ce cas contrainte) soit identique en chaque coupe par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution. La pression à une hauteur donnée est la somme de la pression atmosphérique qui s'exerce au sommet du solide, de la pression exercée par le pont et de la pression exercée par le poids de la partie du solide située au dessus du plan de coupe. Si on veut que cette pression soit constante, on peut avoir l'intuition que le solide doit s'évaser vers le bas. Par contre, l'intuition ne permet pas de savoir quantitativement comment il s'évase : il convient de mettre le problème en équation.  $S(z)$  définit l'aire du disque à la cote  $z$ .  $S$  est une fonction continue. L'axe des  $z$  est orienté vers le bas.

Sur la surface supérieure s'exerce une pression  $P_0$ . La force qui en résulte est donnée par :  $F_0 = P_0 S(0)$ .



La force qui s'exerce à la cote  $z$  est égale à  $F_0$  augmentée du poids du volume  $V(z)$  de solide compris entre le plan supérieur et le plan de coupe, soit  $F_0 + \rho g V(z)$ , où  $\rho$  désigne la masse volumique du solide.

La pression qui en résulte est donnée par :

$$[F_0 + \rho g V(z)]/S(z).$$

La condition d'égalité de contrainte s'écrit :

$$[F_0 + \rho g V(z)]/S(z) = F_0/S(0) = P_0.$$

$$\text{Or } V(z) = \int_0^z S(t) dt, \text{ soit : } S(z) = V'(z).$$

Ainsi la fonction  $V$  vérifie l'équation différentielle :

$$V'(z) = (\rho g/P_0) V(z) + S(0) \text{ avec comme condition initiale : } V(0) = 0.$$

La fonction  $V$  est ainsi obtenue en résolvant une équation différentielle du type  $y' = ay + b$ . On en déduit ensuite la fonction  $S$  puis le profil de la pile (avec  $S(z) = \pi(R(z))^2$ ).

Au niveau du lycée, on initiera les élèves à la modélisation grâce à l'étude de certaines situations, réelles, qu'on simplifiera volontairement à l'extrême et pour lesquelles le modèle grossier ainsi établi devient éclairant ou permet une prévision : la difficulté est alors de garder sens et consistance au problème simplifié.

On pourra envisager quelques cas plus complexes, qui amènent à poser des questions auxquelles on ne sait pas répondre à ce niveau d'études, mais dont la pertinence est accessible aux élèves.

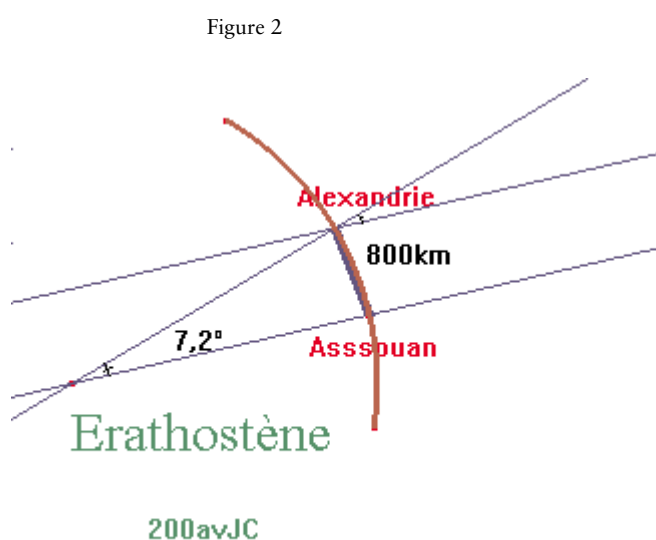
Les chapitres du programme qui fournissent les outils les plus susceptibles d'être utilisés pour de telles modélisations, par exemple à l'occasion des TPE, sont les équations différentielles et les probabilités.

L'exemple ci-dessous, qui figure dans le document d'accompagnement de physique de la classe de seconde, ne fait appel qu'à des notions élémentaires mais permet à un élève de terminale de comprendre l'enjeu de la modélisation et en quoi une observation est tributaire du cadre conceptuel qui permet de l'interpréter.

Au III<sup>e</sup> siècle avant J.-C., Ératostène calcula le rayon de la terre à partir de l'observation suivante : à Syène, en haute vallée du Nil, le jour du solstice d'été, à midi, le soleil était au zénith. À Alexandrie (environ 800 km de Syène), le soleil passait au même moment à peu près à 7,2 degrés du zénith. À partir de ces données, en supposant que le soleil était « à l'infini », un calcul classique permet d'estimer le rayon de la terre à 6 500 km.

Mais si maintenant on suppose que le soleil est proche de la terre et que celle-ci est plate, alors les mêmes observations conduisent à dire que c'est la distance de la terre au centre du soleil qui vaut environ 6 500 km. À partir du diamètre apparent du soleil (environ 1/2 degré), on peut même estimer son diamètre : environ 60 km. Le philosophe Anaxagore, au V<sup>e</sup> siècle avant J.-C. a effectivement montré, mais avec des calculs légèrement différents que le diamètre du soleil était de cet ordre de grandeur : on peut raisonnablement supposer qu'Anaxagore a procédé comme ci-dessus.

Les deux figures ci-dessous concernent ainsi la représentation de la même observation vue « à travers » les hypothèses théoriques en cours à l'époque d'Anaxagore et d'Ératostène.



## Enseigner les mathématiques – construire un corpus mathématique

### Architecture de l'édifice mathématique

Les mathématiques forment un corpus connexe de connaissances : le premier paragraphe du programme de première S l'a bien montré. Chacun organise ce corpus suivant une architecture complexe, en tissant des liens multiples et évolutifs entre différents chapitres ; fabriquer de tels liens contribue à la compréhension et à la maîtrise des concepts (ainsi en est-il de la vision algébrique ou géométrique des systèmes d'équations linéaires) ; l'acquisition d'une nouvelle notion est parfois d'autant plus longue et difficile qu'elle questionne les fondements de la construction élaborée à partir des connaissances antérieures : ainsi, on structure les premières connaissances sur l'intégration à partir d'une notion intuitive d'aire, qui sera remise en cause pour ceux qui poursuivront des études de mathématiques.

Par ailleurs, certaines notions admettent des définitions équivalentes pouvant naturellement s'enraciner dans des problématiques distinctes. Ainsi en est-il par exemple du couple exponentielle/logarithme : faut-il voir l'origine de ces notions à partir d'une

primitive de  $x \mapsto 1/x$ , d'une solution de  $y' = y$ , d'une solution de l'équation fonctionnelle  $f(x + y) = f(x)f(y)$ , de l'extension par continuité d'une fonction puissance, voire de la série entière ? La pluralité des approches possibles donne rituellement lieu à discussions et controverses pédagogiques ; tous les choix sont mathématiquement corrects et il convient de faire remarquer aux élèves qu'une définition dans une approche devient propriété caractéristique dans une autre.

Il importe que les élèves, à la sortie de la classe terminale S, aient compris que si tous les résultats mathématiques se démontrent, ils ne peuvent pas être mis sur le même plan ; pour former un tout cohérent, dont le sens est accessible, il convient de classer les résultats, sans pour autant les figer dans une hiérarchie immuable : des progressions ou des points de vue différents conduisent à des hiérarchies distinctes qui évoluent à mesure qu'on avance.

Établir une hiérarchie suppose la connaissance et l'usage correct des mots de base de tout texte mathématique : définitions (en évitant tout usage abusif de ce mot : seules les définitions utiles et effectivement utilisées seront introduites) / axiomes / théorèmes, propositions, propriétés, corollaires... Conformément à l'usage, on réservera le mot « théorème » aux énoncés fondamentaux : cela facilite l'organisation et la hiérarchisation des divers savoirs.

On veillera à une mémorisation correcte des théorèmes de base : leur formulation est caractéristique du discours mathématique qui se veut à la fois précis, concis et universel ; ils peuvent donc à ce titre servir à l'apprentissage de ce discours mathématique. Pourquoi, avec l'humour et la modération qui s'imposent en la matière, ne pas inciter les élèves à comprendre et apprécier la spécificité de ce langage ? C'est le sens du clin d'œil en alexandrins qui suit :

« Réciter un poème est goûter sa musique ;  
Oublier un phonème en gâche la saveur.  
Ainsi du théorème : il perd sens et logique  
Quand un mot fait défaut lui ôtant sa valeur. »  
(Source anonyme.)

## Démontrer

La démonstration est constitutive de l'activité mathématique : cela a déjà été dit dans le programme et le document d'accompagnement de première S. Rappelons ce paragraphe :

« La *démonstration* est constitutive de l'activité mathématique et les élèves doivent en prendre conscience. Faire en sorte que les élèves puissent concevoir des démonstrations dans leur globalité, puis en détailler les différentes étapes a toujours été et reste un objectif essentiel de tout enseignement des mathématiques en France.

Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations. Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi, pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration académique ; en analyse, par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées : la nature et le niveau des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes. Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schémas (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). On gardera néanmoins l'état d'esprit déjà évoqué dans les programmes de collège et de seconde : repérer clairement le statut des divers énoncés en jeu (définition, axiome, théorème démontré, théorème admis...). La déduction usuelle (par implication ou équivalence) et la manipulation du contre-exemple ont été travaillées en seconde ; des problèmes bien choisis permettront d'aborder en première le raisonnement par contraposition, par l'absurde ou par disjonction des cas ; le raisonnement par récurrence relève de la classe terminale.

La démonstration doit garder un caractère vivant et personnel et il convient d'éviter qu'elle n'apparaisse comme une activité relevant d'un protocole trop rigide. Chaque année, les assertions qui doivent être justifiées dans le cadre d'une pratique de la démonstration changent : il est difficile pour les élèves de cerner, parmi les éléments qui devaient être justifiés les années précédentes, ceux qui deviennent des évidences, pour lesquelles une justification ne ferait qu'alourdir la démonstration (ainsi, en première, on peut mettre dans le bagage des évidences que la fonction  $x \mapsto x^2 + 1$  est à valeurs positives). C'est à l'enseignant de guider au coup par coup cette évolution délicate. Apprendre à rédiger une démonstration constitue un élément important d'une formation scientifique. La rédaction est l'occasion de revenir sur un raisonnement, de le remodeler, de le rendre plus rigoureux et esthétique, de chercher les meilleures notations, de dégager les idées essentielles de l'aspect technique ; c'est ainsi que pour l'élève, des connaissances éparses se fondent en un ensemble cohérent de savoirs, et que se développent des compétences mathématiques fines. Enfin, apprendre à rédiger, c'est aussi acquérir la maîtrise d'une forme particulière d'écriture, mêlant langue usuelle, signes et symboles spécifiques. »

L'objectif premier de la démonstration est d'amener à l'évidence et de rendre nécessaire la proposition que l'on veut énoncer. À ce niveau d'enseignement, la démonstration est toujours un compromis : compromis entre les impératifs logiques du discours formalisé (décrits par N. Bourbaki dans son introduction à la théorie des ensembles) et le souci de rendre compréhensible et claire la marche des idées.

C'est à un tel compromis que fait référence la diversité des mots utilisés dans le programme pour décrire les modalités de mise en œuvre. Que l'on *démontre*, *montre*, *justifie*..., il s'agit toujours d'entraîner l'adhésion intellectuelle par une voie du type démonstration, donc avec rigueur, mais avec des degrés de formalisation adaptés aux élèves.

Dans certains cas, le compromis amènera à admettre certains théorèmes : cela sera alors dit clairement ; mais énoncer et admettre un théorème supposent toujours que celui-ci soit expliqué et que les élèves en comprennent le sens et la portée.

## Rédiger

Les enseignants sont en permanence confrontés au problème de la mise en forme des travaux mathématiques réalisés par leurs élèves ; cette mise en forme prend le plus souvent une forme écrite. Aux difficultés de maîtrise de la langue française s'ajoutent de ce fait celles propres au discours mathématique. Comment alors faire la part, dans la production d'un élève, entre la consistance sous-jacente du raisonnement mathématique et les erreurs d'expression qui peuvent rendre parfois incompréhensible ou contradictoire le propos écrit ? Chaque enseignant a souvent ses convictions en la matière et a élaboré ses propres règles d'exigence ; ce qui, pour l'un, est implicite ou relève d'une convention doit être explicité ou évité pour l'autre. Les différences de point de vue font partie de la richesse de notre système d'enseignement ; la confrontation des élèves avec des personnalités diverses facilite leur prise d'autonomie, dès lors que cette diversité ne va pas jusqu'à la confusion. Chaque enseignant gardera ici le cap sur l'objectif essentiel, à savoir rendre les élèves capables de produire un texte écrit clair, précis et logiquement articulé. Certains élèves peuvent avoir besoin de clarifier divers niveaux de langage ou d'écriture utilisés en mathématiques. On peut, pour ceux-là, s'inspirer de la classification faite en français, où l'on distingue les niveaux suivants : *soutenu* (vocabulaire et syntaxe recherchés, précis), *courant* (vocabulaire usuel et correct), *familier* (langue peu surveillée qui présente des écarts avec le vocabulaire et la syntaxe corrects) et *relâché* (langue très libre et souvent incorrecte) (voir *Méthodes et Pratiques du français au lycée*, Magnard, 2000). En mathématiques, le langage pourra être *familier* voire *relâché* au brouillon ou lors de certaines prises de notes ; il sera *soutenu* lors de l'écriture des théorèmes et des phases essentielles de résolution ; il pourra être *courant* dans tous les autres cas.

L'utilisation de symboles mathématiques ( $\mathbb{R}$ ,  $\in$ ,  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\subset$ ...) est indispensable mais doit rester modérée. Une place à part est néanmoins à faire aux connecteurs logiques ( $\Leftrightarrow$  et  $\Rightarrow$ ) : leur utilisation ne doit pas prendre la place de liens de langage tels que *d'où*,

donc, on en déduit que, il s'ensuit que... ; toute rédaction doit comporter une part de phrases en langue française. Quant aux quantificateurs *pour tout...* et *il existe...*, présents en permanence dans la plupart des propositions mathématiques, ils pourront être abrégés (en particulier au brouillon) à l'aide des symboles  $\forall$  ou  $\exists$ , que l'on pourra introduire au fur et à mesure de l'année.

On propose ci-dessous quelques exemples. Ils n'ont pas vocation à être normalisateurs : ils illustrent l'importance fondamentale du bon sens et le refus d'un formalisme excessif et stérilisant.

### Exemples

Trouver deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout réel  $x$  différent de 1, on ait

$$\frac{x+2}{x-1} = a + \frac{b}{x-1} \quad (1).$$

*Formulation 1* : Pour tout réel  $x$  différent de 1, on a :  $\frac{x-1+3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ .

Dans des cas élémentaires, comme ici, cette formulation suffit largement.

*Formulation 2* : Pour tout réel  $x$  différent de 1,  $a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax-a+b}{x-1}$ .

Pour avoir (1), il suffit donc d'avoir  $\begin{cases} a=1 \\ b-a=2 \end{cases}$ , c'est-à-dire  $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$ .

Le raisonnement par condition suffisante (aucune unicité n'est ici demandée) permet de répondre à toutes les questions de ce type.

*Formulation 3* : Pour tout réel  $x$  différent de 1,  $a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax-a+b}{x-1}$ .

On a (1) si et seulement si les numérateurs sont égaux pour tout réel  $x$  différent de 1. Or, deux polynômes sont égaux pour une infinité de valeurs si et seulement s'ils ont mêmes coefficients.

On a donc (1) pour tout réel  $x$  différent de 1 si et seulement si  $\begin{cases} a=1 \\ b-a=2 \end{cases}$ , c'est-à-dire  $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$ .

Cette formulation, un peu caricaturale dans ce cas élémentaire, est d'un formalisme exagéré à ce niveau d'études.

*Remarque* – Plaidoyer pour les brouillons

La recherche d'une solution à un problème nécessite souvent d'essayer plusieurs pistes, d'avancer dans des raisonnements et des calculs ne demandant à être justifiés que s'ils mènent au résultat. Et si tel est le cas, il convient de prendre du recul par rapport au chemin parcouru, de vérifier qu'il n'est pas inutilement sinueux, que les notations sont pertinentes ; les modes de travail face à un brouillon, qui est un texte privé dont la structure n'est pas linéaire, ou face à une copie à remettre à un professeur, ne sont pas identiques. On peut comparer les brouillons aux cahiers de croquis du peintre : esquisse de l'ensemble du tableau, études. L'usage de crayons effaceurs ou autre matériel analogue conduit aujourd'hui les élèves à faire peu de brouillons : il convient éventuellement de leur faire sentir qu'ils perdent ainsi un espace de liberté formateur. C'est aussi en retravaillant un exercice fait au brouillon que les méthodes et idées ayant conduit à sa résolution s'inscrivent dans la mémoire de l'élève.

## Quelle place pour l'histoire des mathématiques ?

On relira à ce propos le troisième paragraphe du programme de mathématiques de première que le texte ci-dessous de Jean-Toussaint Desanti éclaire.

« ... Ils apprendront aussi que les mathématiques ont leur mémoire ; et que, comme toute mémoire, elle comporte des replis, des lieux cachés, qu'il importe de débusquer

pour les ramener au jour. Pourquoi les ramener au jour ? et pour quel bénéfice ? Faut-il, pour “apprendre les mathématiques”, parcourir encore tous les chemins du passé ; revivre encore tous ces détours, affronter de nouveau, comme s’ils étaient les nôtres, ces problèmes aujourd’hui résolus ? Tous, certainement pas. Qui le pourrait jamais ?... Les mathématiques ne sortent pas toutes faites de la tête du maître qui écrit au tableau noir. Elles ne résident pas, toutes faites, dans le traité, si achevé en sa belle ordonnance. Nullement. Leur état présent et décanté, par quoi nous commençons à les apprendre, n’est lui-même qu’une figure d’équilibre, précieuse aujourd’hui, mais transitoire comme d’autres qui l’ont précédé et dont elle porte la marque. Apprendre à déchiffrer ces marques, c’est réveiller la mémoire. Le moins qu’on puisse y gagner, c’est un peu d’humour. On apprendra la peine qu’a coûté le moindre “pont aux ânes”. Mais on y gagnera bien davantage encore : plus de conscience ; une autre clarté que celle qui naît de la stricte observance de ces procédures, parce qu’elle concerne les motivations qui ont exigé ces procédures mêmes. “Pourquoi des mathématiques ?” dit-on. Et on ajoute : “À quoi bon ?” Un titre comme celui-ci montre comment “des mathématiques” se sont produites. Il montre quelles sortes de travaux, non homogènes, cette production a coûté, à quelles exigences, à quelles contraintes externes et internes de tels travaux ont dû se plier. En cela, il peut permettre de répondre à la double question : “Pourquoi ?” et “À quoi bon ?” »

Dahan-Dalmedico A. et Peiffer J., *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, Seuil, coll. « Points Sciences ». Introduction.

Ainsi, tout rapport aux mathématiques s’enracine dans leur histoire passée, mais aussi dans l’histoire présente, dans leur lien avec les autres disciplines, notamment la physique, dans l’appréhension de la transformation profonde liée au développement de l’informatique, dans leur usage social et dans l’image que la société renvoie de cette discipline. Alors, comment concilier tout cela dans un temps limité d’enseignement ? Rappelons qu’il faut avant tout... faire des mathématiques. Aussi convient-il de bien choisir, parmi les nombreuses questions dont l’histoire est riche, une ou deux d’entre elles en fonction d’un lien étroit avec le programme ; mais le choix est difficile, d’autant plus que certaines pages d’histoire des mathématiques peuvent se poser en obstacle pour accéder à un nouveau concept (par exemple en probabilités).

## Organisation du travail des élèves

Le programme ne donne aucune indication de progression pédagogique et il n’est pas non plus linéaire : on ne peut donc pas, comme dans certains programmes antérieurs, bâtir un cours en partant de la première ligne du programme et en continuant jusqu’à la dernière.

Des indications globales de durée sont données pour chacun des trois grands titres : environ quatorze semaines pour l’analyse, onze semaines pour la géométrie et six semaines pour les probabilités.

Rappelons comme cela a déjà été fait dans le document de première que l’efficacité de l’enseignement est à optimiser en jouant sur les divers temps du travail des élèves, en classe entière, en demi-classe ou en travail personnel : les paragraphes précédents, ainsi que le paragraphe 4 du programme de première S, donnent de nombreuses pistes pour adapter des activités à ces divers temps.