Analyse

Un concept important – celui d'équation différentielle

On a évoqué plus haut l'importance de la modélisation dans la pratique scientifique ; dans de nombreuses situations (exemples page suivante), la traduction mathématique va mettre en jeu des fonctions et des relations entre ces fonctions et/ou leurs dérivées. Il importe donc que les élèves se familiarisent avec ce type de relations, et ce, dès le début de l'année scolaire. Le paragraphe introductif du chapitre II.1 du programme est très explicite : « On privilégiera les problèmes mettant en jeu des liens entre une fonction et sa dérivée première ou seconde. » L'étude des variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée appartient bien sûr à cette catégorie de problèmes : elle a été abordée en première et sera poursuivie systématiquement en terminale. Mais on n'utilise alors qu'une infime partie de l'information donnée par cette dérivée, à savoir son signe ; les élèves ont déjà vu en première que l'on pouvait aller plus loin puisqu'ils ont été amenés à « construire point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par : $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\ \Delta t$ » (l'écriture $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$ devra aussi être familière aux élèves). C'était un premier contact avec le concept d'équation différentielle, que l'on réactivera dès le début de terminale et à l'occasion de recherches de primitives.
Le travail des élèves sur l'année de terminale peut être décomposé en plusieurs parties : un travail sur la fonction exponentielle en début d'année ; puis, au cours de l'année on étudiera l'équation $y' = ay + b$: les élèves doivent savoir que par un point quelconque, il passe une solution unique. Enfin, on rencontrera des exemples divers d'équations différentielles : il importe de donner des exercices où apparaissent des équations différentielles autres que $y' = ay + b$ mais comme aucune connaissance spécifique à ce sujet n'est au programme, on donnera toutes les indications utiles. On fera vivre le concept régulièrement dans l'année.
On choisira avec soin une ou deux situations menant à une équation différentielle simple. Les élèves seront guidés dans le travail de traduction mathématique. Cette étape est délicate : s'y confronter au moins une fois est indispensable, mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet pour l'examen du baccalauréat. Une équation étant posée ou donnée, les élèves pourront vérifier si telle ou telle fonction déjà connue en est solution ; sinon, ils pourront être amenés à en approcher une à l'aide de la méthode d'Euler vue en première. Des exemples de telles situations sont donnés ci-dessous.
On signalera, si besoin est, que l'écriture $y' = ay + b$ est consacrée par l'usage, mais on évitera tout formalisme et toute définition générale à propos des équations différentielles. L'importance de ce chapitre ne réside pas dans la multiplicité des types d'équations qu'on peut envisager de résoudre, mais dans les idées qui sous-tendent cette notion. Il s'agit d'équations dont l'inconnue est une fonction, définie sur l'ensemble des réels ou sur un intervalle imposé par la situation originelle (ou de façon arbitraire). On pourra reprendre une ou deux équations du cours de physique ; à l'occasion de problèmes d'études de fonctions et de calculs de primitives, on ne s'interdira pas d'étudier des propriétés de solutions d'équations différentielles : le travail sur les équations différentielles renforce l'acquisition d'automatismes sur les calculs de primitives ; on pourra par exemple faire le lien entre la recherche d'une primitive de $y'y$ et la recherche de solutions de l'équation $yy' = a$.

Remarque – Le programme, dans la colonne *Commentaires*, délègue au cours de physique l'introduction de solutions des équations différentielles $y'' + \omega^2 y = 0$; cela signifie simplement que l'étude générale de ces équations n'est pas au programme de mathématiques. Ce commentaire témoigne par ailleurs d'un souci de vision croisée des diverses disciplines où, par exemple, le professeur de mathématiques peut s'inspirer d'une situation cinématique pour présenter la dérivée et le professeur de physique introduire un concept mathématique pour modéliser un problème ; une telle vision est conforme tant à la réalité de l'élève, individu unique face aux multiples exigences de chaque discipline, qu'à celle des mathématiques (il n'y pas lieu d'opposer mathématiques « utiles » et mathématiques « pour l'honneur de l'esprit humain ») ou de la physique (dont le langage naturel est celui des mathématiques).

La radioactivité

Cet exemple est développé en annexe, dans un document commun aux trois matières scientifiques (mathématiques, physique, sciences de la vie et de la Terre) ; il propose un travail en plusieurs étapes sur le thème de la radioactivité : modélisation et traitement mathématique peuvent y être menés conjointement en mathématiques, physique et géologie ; une progression y est suggérée. Ce travail permet d'aborder relativement tôt dans l'année l'étude de la fonction exponentielle. Une annexe au document (partie I) montre comment l'existence de cette fonction peut être directement prouvée : une telle démonstration n'est pas au programme mais il convient de mentionner son existence. On revient de toute façon sur l'existence après l'intégration, à partir de la primitive de $1/x$ (l'existence de l'aire sous une courbe se conçoit plus aisément que celle d'une solution de l'équation $y' = y$). Le développement de la partie II offre par contre un exemple de la puissance et de l'élégance des mathématiques et fournit l'occasion de faire de vraies démonstrations en analyse : il serait bon que chaque élève puisse y accéder.

La chute d'un corps

Il est important que, dans l'enseignement de mathématiques, soient reprises une ou deux des équations traitées en physique en classe terminale.
Voici comment on peut résumer la problématique générale de l'utilisation des équations différentielles en physique. Il nous suffira ici de considérer la catégorie importante des phénomènes qui se déroulent sur une certaine durée. Le physicien relève l'évolution temporelle d'un certain type de phénomènes. Il obtient ainsi par des mesures les valeurs prises en fonction du temps par les variables qui décrivent le phénomène. Et ensuite il cherche à déduire ces fonctions d'une loi « instantanée », comme par exemple : à chaque instant, « l'accélération est proportionnelle à la force », ou encore « la force de frottement est proportionnelle à la vitesse ». De telles lois instantanées permettent d'écrire l'équation différentielle du phénomène. Les solutions de cette équation, correspondant aux diverses conditions initiales possibles, redonnent, si tout va bien, les évolutions temporelles observées. Les physiciens valident l'équation différentielle qui sert de modèle en vérifiant que, dans la limite des erreurs de mesure, les évolutions temporelles ainsi déduites sont conformes à la réalité expérimentale.
Prenons l'exemple de la chute d'une bille dans un milieu visqueux. Une observation attentive de la vitesse du centre d'inertie de la bille montre l'existence, au bout d'un certain temps, d'un mouvement limite nettement différent du mouvement initial. L'interprétation des observations conduit le physicien à proposer une modélisation de la force de frottement exercée par le milieu fluide sur la bille. Cette modélisation est nécessaire pour établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse du centre d'inertie de la bille. L'étude mathématique de l'équation différentielle donne une solution analytique que le physicien utilise pour vérifier, *a posteriori*, la validité du modèle qu'il vient d'établir.
Au début du mouvement la croissance de la vitesse avec le temps s'interprète comme dans le cas de la chute d'un solide dans un fluide non visqueux : tant que la vitesse est faible, on néglige les forces de frottement du fluide. En première approximation, la bille n'est alors soumise qu'à son poids et à la poussée d'Archimède qui s'oppose au poids de la bille. La bille est plus dense que l'eau, la résultante de ces deux forces est dirigée vers le bas et de norme $f = m'g$, avec $m' < m$ où m est la masse de la bille.

Après une phase intermédiaire, le mouvement observé de la bille est un mouvement uniforme. La vitesse ne varie plus au cours du temps : à la précision des mesures près, la vitesse du centre d'inertie de la bille a atteint une valeur limite. Cette vitesse limite dépend de la masse de la bille et du milieu visqueux.
L'application de la deuxième loi de Newton permet au physicien de poser l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v :

$$m.\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f + m'.g$$

où f est la force de frottement. La force de frottement s'oppose au déplacement. Pour une bille de faible diamètre et un milieu suffisamment visqueux, l'observation du mouvement de la bille conduit à considérer que, pour ces conditions expérimentales, $f = -kv$.
L'équation différentielle devient donc :

$$m.\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -kv + m'g.$$

La solution générale de l'équation différentielle précédente conduit à une loi d'évolution temporelle de la vitesse liant la vitesse v au temps :

$$v(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau}),$$

où v_∞ est la vitesse limite, soit $v_\infty = m'g/k$ et où τ est appelé le temps caractéristique ; mathématiquement, la vitesse limite n'est jamais atteinte, mais au bout de quelques temps caractéristiques, on ne peut plus en pratique distinguer $v(t)$ de v_∞ ($e^{-3} = 0{,}05$, $e^{-5} = 0{,}007$, $e^{-10} = 4{,}5 \times 10^{-5}$). Le temps caractéristique τ vaut ici m/k. On notera que la tangente à l'origine à la courbe représentative de la solution a pour équation $v = v_\infty t/\tau$ et coupe l'asymptote au temps $t = \tau$; le temps caractéristique se trouve ainsi lié à la première phase du mouvement (où on néglige les forces de frottement) et au mouvement limite : c'est ainsi que les physiciens interprètent ce paramètre.
Il est intéressant de noter que les grandeurs utilisées par le physicien ne sont pas, en général, des « nombres purs » mais des grandeurs dimensionnées ; or la fonction exponentielle ne peut être définie que pour des nombres. Dans une écriture telle que e^{-kt} où t serait un temps, le paramètre k est nécessairement l'inverse d'un temps.

Problèmes géométriques. Recherche de courbes conditionnées par la sous-tangente ou la sous-normale

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, soit Γ la courbe d'équation $y = f(x)$, où f est une fonction définie et dérivable sur intervalle I, dont la dérivée ne s'annule pas.
À tout point $\mathrm{M} = (x_\mathrm{M} ; y_\mathrm{M})$ de Γ, on associe les points H, T, N définis comme suit : H est le projeté orthogonal de M sur Ox, T est le point d'intersection de l'axe Ox et de la tangente en M à Γ et N est le point d'intersection de l'axe Ox et de la normale à Γ en M.

a) Déterminer les cordonnées de H, T, N en fonction de x_M, $f(x_\mathrm{M})$, $f'(x_\mathrm{M})$.
b) Déterminer les fonctions f telles que $x_\mathrm{M} - x_\mathrm{T}$ soit constant.
c) Déterminer les fonctions f telles que $x_\mathrm{M} - x_\mathrm{N}$ soit constant.
d) Déterminer les fonctions f telles que le point N soit fixe.

Équation logistique

Une modélisation possible de l'évolution de certaines populations conduit à l'équation différentielle $\mathrm{d}P / \mathrm{d}t = kP$ (où k est un paramètre strictement positif) et aboutit à la croissance exponentielle $P(t) = P(0)exp(kt)$. Cette modélisation n'est pas pertinente quand t devient grand et d'autres équations ont été proposées pour tenir compte des facteurs qui limitent l'accroissement des populations réelles (taille du territoire et quantité de nourriture).
L'équation logistique, proposée par Verhulst en 1838, est de la forme $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = aP(m - P)$.
Les élèves peuvent commencer par déterminer les solutions constantes : les deux possibilités étant $P(t) = 0$ pour tout t, ou bien $P(t) = m$ pour tout t ; ensuite, ils peuvent déterminer le signe de $P'(0)$ selon que $0 < P(0) < m$ ou $m < P(0)$; compte tenu du problème, on étudie ci-dessous les solutions telles que $P(t) \geqslant 0$ pour tout t.
À ce stade, on peut avoir une idée intuitive du comportement des solutions, éventuellement confortée par le recours à la méthode d'Euler.
Pour résoudre l'équation, on se limite aux solutions telles que $P(t)>0$ pour tout t, et on fait le changement de fonction défini par $y(t) = 1/P(t)$ pour tout t.

L'équation en y est alors $y' = a - amy$ que l'on résout en $y(t) = 1/m\ [1 + C\exp(-amt)]$ puis en :

$$P(t) = m/(1 + C\exp(-\,amt)) \text{ où } C = m/P(0) - 1.$$

Suites et fonctions

On pourra illustrer par un exemple la réflexion sur le passage du discret au continu.

Exemple

Capitalisation : suite ou fonction, quel est le bon modèle ?
Soit un capital C_0 placé au taux annuel de 100τ % et C_n le capital au bout de n années : $C_n = C_0\ (1 + \tau)^n$.
– Capitalisation par quinzaine : u_n le capital au bout de n quinzaines :
$u_n = C_0\ (1 + \tau/24)^n$; $C_1 = u_{24}$.
– Capitalisation quotidienne : v_n le capital au bout de n jours :
$v_n = C_0\ (1 + \tau/360)^n$; $C_1 = v_{360}$.
– Capitalisation continue :
$C_1 = C_0e^{\tau}$ et par extension capital à l'instant x (l'unité étant l'année) ; $C(x) = C_0e^{\tau x}$.
On pourra se reporter au document d'accompagnement de la série ES, au paragraphe sur les limites.

Suites adjacentes

Nos premiers pas dans l'univers numérique ont été guidés par deux idées simples mais bien distinctes : d'une part, nous pouvons effectuer dans ce domaine les quatre opérations du calcul élémentaire (addition, soustraction, multiplication, division). D'autre part, nous pouvons comparer deux nombres réels, c'est-à-dire distinguer un plus petit et un plus grand. Les quatre opérations s'étendent sans grande difficulté au cadre élargi des nombres complexes, comme l'apprennent les élèves de terminale S. L'opération de comparaison reste en revanche confinée aux réels, puisqu'elle est intimement liée à la droite géométrique : nous disposons sur l'axe réel de la notion d'avant et après, mais il n'y a rien d'analogue sur le plan.
L'étude des suites de nombres réels intègre naturellement ces deux aspects tout en visant à munir les élèves d'une intuition du continu numérique. L'aspect algébrique fait l'objet de règles opératoires simples (par exemple : la somme de deux suites convergentes est convergente, et la limite de la somme est la somme des limites) assez intuitives pour être facilement utilisables par les élèves. La démonstration des formules algébriques concernant les limites n'est pas ici la préoccupation essentielle, mais il convient pourtant de dire aux élèves que ces règles se démontrent rigoureusement dès lors qu'on dispose d'une définition précise de la limite.
Les questions qui relèvent de la comparaison des réels sont plus subtiles, puisqu'elles ouvrent la voie aux résultats du type « segments emboîtés », au caractère complet de la droite réelle, en bref aux diverses formes d'un théorème d'existence délicat. Ces idées, au carrefour du calcul et de la géométrie, ont nourri depuis longtemps la réflexion des mathématiciens. Elles sont à la base de notre perception du continu numérique, et peuvent aider les élèves à comprendre la nécessité de définitions précises. Il peut être instructif, par exemple, de tester leur intuition géométrique en leur demandant si entre deux points distincts de la droite, il en existe une infinité d'autres.
Le programme se propose d'enrichir cette intuition à l'aide du théorème des suites adjacentes, qu'on peut formuler ainsi : soit (u_n) une suite croissante de nombres réels, soit (v_n) une suite décroissante de nombres réels, telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n et $\lim\,(v_n - u_n) = 0$. Alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l, qui est l'unique nombre réel tel que $u_n \leqslant l \leqslant v_n$ pour tout n. Ce résultat, clairement faux si on se limite aux nombres rationnels, est lié à la définition des nombres réels.
La convergence d'une suite (u_n) vers l s'exprime, comme suggéré par le programme, en disant que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les u_n à partir d'un certain rang. On peut aussi dire que cet intervalle contient tous les u_n sauf un nombre fini,

mais cette formulation brise l'analogie avec les limites de fonctions. Cette définition de la limite permet un début de travail rigoureux. Bien qu'il ne s'agisse pas d'en faire un usage intensif, le fait de présenter dans quelques cas simples les démonstrations qu'elle permet de développer est un objectif du programme d'analyse. La construction axiomatique de l'ensemble des nombres réels est hors programme ; mais le choix fait (partir, comme si c'était un axiome, de la propriété des suites adjacentes) permet d'établir avec cohérence et rigueur les propriétés caractéristiques de la droite réelle.
Il est donc important que les élèves manipulent ce résultat pour en comprendre la portée. Voici quelques pistes dans ce but, qui pourraient faire l'objet de devoirs :
– Établir la validité de la méthode de dichotomie : si on part d'un intervalle fermé borné I_0, qu'on le partage en deux intervalles fermés de longueurs égale I et I', qu'on choisit l'un d'entre eux noté I_1 sur lequel on effectue à nouveau cette opération, on construit par récurrence une suite I_n d'intervalles dont l'intersection est un point.
– Déduire de la méthode de dichotomie que toute suite croissante majorée converge. Montrer inversement que si l'on admet que toute suite croissante majorée converge, on peut en déduire le théorème des suites adjacentes et donc la validité de la méthode de dichotomie.
– Si une fonction f est continue, alors (par le résultat sur la limite de la composée d'une suite et d'une fonction) si $\lim (x_n) = a$ on a $\lim f(x_n) = f(a)$. Montrer alors par dichotomie le théorème des valeurs intermédiaires, en choisissant les intervalles aux extrémités desquels les valeurs de la fonction sont de signes opposés. On pourra aussi faire remarquer que le théorème des valeurs intermédiaires, lorsqu'on l'applique par exemple à la fonction carré, oblige de même à sortir du cadre des nombres rationnels.
Montrer que tout nombre réel positif x est limite de deux suites adjacentes de rationnels décimaux ; en déduire l'existence du développement décimal d'un nombre réel. Cet exercice est délicat ; on pourra éventuellement attirer l'attention des élèves sur l'usage de la fonction discontinue « partie entière » dans l'obtention des termes du développement décimal (discontinuité inévitable puisqu'on ramène la description du continu numérique à une notation discrète), sur l'utilisation du caractère archimédien de la droite réelle, et sur des exemples de non-unicité du développement décimal. Les élèves pourront ainsi faire le lien entre la somme d'une série géométrique et l'égalité 1 = 0,99999…, et percevoir comment la théorie des nombres réels prolonge le calcul pratique qu'ils effectuent à la main ou sur calculatrice ou tableur avec un nombre fini de décimales.
On utilisera les suites adjacentes pour définir certains objets ou encadrer des réels.

– Existence de $\exp(x)$ (voir annexe du document sur la radioactivité).
– Encadrement du nombre π à l'aide de périmètres ou d'aires de polygones réguliers. Cet encadrement conduit à des calculs assez longs, et à l'utilisation de la dérivée de $\sin(x)$ en 0. Si le temps manque pour faire ces calculs, on pourra insister sur l'évidence géométrique du caractère adjacent des suites utilisées.
– Encadrement d'un réel par des rationnels (voir exemple 2 sur la « duplication du cube », page 14).

– Étude de suites adjacentes associées à des situations ou problèmes étudiés dans la classe (par exemple en prolongement de l'exemple 1 sur « l'art de moyenner » : étude des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ (avec $b > a > 0$), $u_{n+1} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}}$ (moyenne harmonique de u_n et v_n) et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ (moyenne arithmétique de u_n et v_n) pour tout n ; ces deux suites sont adjacentes et de produit constant : elles convergent donc vers la moyenne géométrique de a et b.

On pourra observer numériquement la rapidité de convergence de quelques-uns des exemples ci-dessus, mais aucune compétence n'est exigible à ce propos.

Le raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence peut s'énoncer ainsi : soit P(n) une propriété de l'entier positif ou nul n. Si on a P(0) et que pour tout $n \geqslant 0$, P(n) implique P(n + 1), alors on a P(n) pour tout $n \geqslant 0$. Il est important de faire remarquer aux élèves qu'on peut également appliquer ce principe à partir d'un certain rang n_0, en leur donnant des exemples simples où la récurrence ne s'initialise pas en 0.
Si un problème en requiert l'usage, on peut présenter le « principe de récurrence fort », qui s'énonce ainsi : soit P(n) une propriété de l'entier positif ou nul n. Si on a P(0), et que pour tout $n > 0$, on a l'implication « si on a P(k) pour tout k strictement inférieur à n, alors on a P(n) », alors on a P(n) pour tout $n \geqslant 0$.

– Ces deux formes sont logiquement équivalentes, et encore équivalentes à l'énoncé : « tout ensemble non vide d'entiers positifs admet un plus petit élément », ou à l'énoncé : « toute suite décroissante d'entiers positifs est constante à partir d'un certain rang ». Mais on ne peut pas bien sûr entraîner les élèves dans ces subtilités, ni leur faire établir l'équivalence des différentes formes du principe de récurrence.
– On ne multipliera pas les exemples de « paradoxes » démontrés à l'aide d'une récurrence subtilement incorrecte, mais on montrera sur des exemples l'usage positif et puissant qu'on peut en faire.

La difficulté conceptuelle du principe de récurrence est qu'il faut bien comprendre ce qu'on fait quand on suppose P(n) pour démontrer P(n + 1). Les élèves peuvent en effet avoir l'impression de supposer ce qu'ils veulent démontrer et donc qu'il n'y a rien à faire, ou au contraire que l'argumentation est un cercle vicieux. La mise en forme d'une démonstration par récurrence est difficile, et il pourra être utile de proposer un schéma de rédaction. Quelques exercices seront sans doute plus efficaces qu'un discours abstrait pour leur faire saisir que la récurrence permet de démontrer une infinité de propositions parce que le pas qui permet de passer d'une de ces propositions à la suivante est toujours le même. Une image classique à ce sujet est celle d'un escalier (infini) gravi par un marcheur (infatigable) qui cependant ne pourrait pas sauter des marches. Une autre image est celle de sucres disposés verticalement les uns à coté des autres (chaque sucre fait tomber le suivant à condition qu'on pousse le premier), ou celle de l'hérédité d'une propriété de la génération n à la génération n + 1.

Limites et comportements asymptotiques

Comme il est dit plus haut, la notion de limite traverse tout le programme d'analyse du cycle terminal : c'est un concept mathématique important, intuitif mais difficile à manipuler avec rigueur à ce niveau. Son appropriation ne peut être achevée à l'issue de la classe terminale, mais il est souhaitable que tous les élèves, quel que soit leur cursus ultérieur, aient entrevu l'intérêt et la place d'une définition formelle. Le programme se limite pour ce faire aux limites à l'infini ; il demande que soit ensuite démontré le théorème dit des « gendarmes » pour les fonctions, en prolongeant simplement ce qui a été fait en première pour les suites. On pourra aussi démontrer une ou deux *règles opératoires* évoquées dans le programme mais ces démonstrations ne sont pas un objectif premier à ce niveau d'études (ni *a fortiori* un élément à évaluer à l'examen du baccalauréat) ; leur technicité et leur caractère abstrait les rendent difficiles. On justifiera néanmoins tous les résultats énoncés à l'aide d'arguments intuitifs, tout en soulignant qu'une démonstration formelle existe.
Le théorème des « gendarmes » sera étendu au cas de limites infinies : dans ce cas, on ne recherchera pas bien sûr un encadrement de la fonction ou de la suite étudiée mais, selon que la limite est $+\infty$ ou $-\infty$, une minoration ou une majoration.
Le programme n'évoque pas explicitement la compatibilité de l'ordre et du passage à la limite, à savoir le théorème suivant (énoncé ici à l'infini) : « Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leqslant g(x)$, et si $\lim\limits_{+\infty} f = l$ et $\lim\limits_{+\infty} g = l'$, alors $l \leqslant l'$. » Mais il serait dommage de

se priver de son usage lors de certains développements en classe ou en travaux à la maison ; ce résultat est simple, et il y aurait avantage à le démontrer pour travailler sur la définition formelle (et développer un raisonnement par l'absurde élémentaire).

En reprenant le vocabulaire des « tuyaux » utilisé dans le document d'accompagnement de première : supposons $l > l'$; soit deux « tuyaux » centrés respectivement en l et l', de rayons inférieurs à $\frac{l-l'}{2}$; alors ces deux « tuyaux » sont disjoints et celui centré en l est au-dessus de celui centré en l' ; pour x assez grand, $f(x)$ sera dans le premier « tuyau » et $g(x)$ dans le deuxième, et donc on aura $f(x) > g(x)$; ce qui est contraire à l'hypothèse sur f et g.

Les élèves ont énoncé en première des règles de calcul relatives aux sommes et produits de limites de fonctions ; ils ont aussi étudié le comportement de fonctions rationnelles élémentaires au voisinage des points où elles ne sont pas définies. On fera le point sur toutes ces règles et on les complètera, en particulier avec les quotients. À propos de ces derniers, on pourra parler de limite à droite ou à gauche en a.
Pour les comportements asymptotiques des fonctions usuelles (polynômes, fonctions rationnelles, logarithmes ou exponentielles), il est recommandé d'insister sur l'intuition et la compréhension de ce qui se passe : intuition éclairée par des approches numériques sur calculatrice ou tableur, démonstration complète dans quelques cas particuliers repérés dans le programme, utilisation directe de règles dites *opératoires* comme dans les exemples élémentaires ci-dessous.

Calculs de limites

1) Soit f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 3}{-x^2 + x}$.

Pour la limite en $+\infty$, il suffira d'écrire l'enchaînement : $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{-x^2}$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$.

(On a utilisé la *règle opératoire* : à l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.)

Pour la limite en 1, comme $\lim\limits_{x\to1}\left(x^3 - 2x + 3\right) = 2$, $\lim\limits_{x\to1}\left(-x^2 + x\right) = 0$ et que $-x^2 + x$ est négatif à droite de 1, on a : $\lim\limits_{1} f = -\infty$.

2) Soit f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^2}$

On a directement : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ car, en l'infini, e^x l'emporte sur toute fonction puissance et donc sur tout polynôme en x.

3) Soit f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^2-2}}{(1+x)^2}$.

Les élèves devraient voir directement que la limite en $+\infty$ vaut $+\infty$: l'exponentielle l'emporte sur la puissance. Un enchaînement fondé sur les règles données en cours peut ensuite être établi :

– par exemple en écrivant $f(x) = \dfrac{e^x}{\left(1+x\right)^2} \times e^{x^2-x-2}$; on se ramène à l'exemple précédent et à un cas de fonction composée ;
– ou en utilisant l'inégalité $x < x^2 - 2$ pour x assez grand ($x > 2$), d'où $e^x < e^{x^2-2}$, d'où la limite par comparaison avec la limite de l'exemple 2.
4) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$. Sur un exemple aussi simple, l'élève pourra énoncer directement que la limite en $+\infty$ est $+\infty$.
5) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$. En $+\infty$, on observe une indétermination ; la mise en place des règles opératoires durant le cours et les traitements antérieurs d'exemples incitent à mettre en facteur le terme « le plus fort ».

Sauf intention pédagogique particulière, on évitera tout exemple artificiellement compliqué ou construit pour exhiber des pièges : l'objectif est celui d'une bonne compréhension globale. Des calculs plus fins de limites relèvent du niveau d'études ultérieure.

Langage de la continuité

La notion de continuité dans le langage courant est synonyme d'absence de rupture pour passer d'un point à un autre, d'un état à un autre et est ainsi associée à un mouvement ou un changement d'état ; intuitivement, la continuité d'une fonction sur un intervalle I signifie qu'on peut tracer sa représentation graphique sans lever le crayon (dans une telle représentation, les traits verticaux ne sont bien sûr pas admis).
La traduction mathématique de la notion intuitive de continuité en un point (propriété locale), puis sur un intervalle de $\mathbb{R}$ permet à l'enseignant d'avoir un discours cohérent : on admettra que les fonctions construites par sommes, produits, compositions à partir des fonctions usuelles (polynômes, logarithme, exponentielle) sont continues, en indiquant que les démonstrations reposent sur des manipulations de la définition ; démontrer qu'une fonction est continue n'est pas un objectif du programme, et la définition ne sera mise en œuvre que sur un ou deux exemples de fonctions admettant des discontinuités (fonction « partie entière » notamment).
Comme on s'intéresse ultérieurement aux fonctions qui transforment les sommes en produit ou vice-versa, on pourra démontrer que les seules fonctions continues transformant les sommes en sommes sont les fonctions linéaires, et rappeler à cette occasion qu'en physique et en biologie, ce qu'on appelle fonction linéaire est une fonction telle que les accroissements de la fonction sont proportionnels à ceux de la variable, *i.e* les fonctions affines du cours de mathématiques.
Le théorème des valeurs intermédiaires est utilisé sous une forme intuitive dans les exemples 1 et 2 du paragraphe « Enseigner les mathématiques : résoudre des problèmes ».

> Une démonstration de ce théorème consiste à se ramener au cas d'une fonction f continue sur $[a, b]$, telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On construit alors par dichotomie deux suite adjacentes (a_n) et (b_n) :
> 1) $a = a_0$ et $b = b_0$;
> 2) si $f((a_n + b_n)/2) \geqslant 0$, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$;
> 3) si $f((a_n + b_n)/2) < 0$, $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$.
> Soit c la limite commune de (a_n) et (b_n) ; alors $(f(a_n))$ converge vers $f(c)$, d'où $f(c) \leqslant 0$; $(f(b_n))$ converge vers $f(c)$ d'où $f(c) \geqslant 0$; il s'ensuit que $f(c) = 0$.

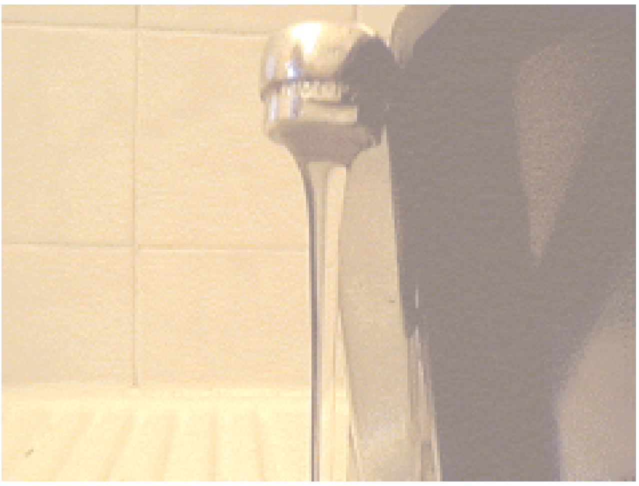
Sur un tableau de variations d'une fonction f, on peut lire les intervalles où celle-ci est continue et strictement monotone. On pourra déduire directement l'existence et l'unicité de la solution d'une équation $f(x) = k$ à partir du tableau de variations. Il ne s'agit pas pour autant qu'un tel tableau soit un passage obligé dans une rédaction.

Fonctions

Les élèves se sont habitués depuis la classe de seconde au fait qu'en toute science, les grandeurs ne sont pas seulement envisagées du point de vue de leur mesure directe, mais aussi de leur dépendance vis-à-vis d'autres grandeurs, d'où le concept de fonction. En terminale, il peut être utile de rappeler à travers un ou deux exemples que des fonctions variées se trouvent dans des problèmes même relativement simples. Il est aussi indispensable d'étudier des fonctions en tant que telles afin d'acquérir des techniques de calcul, des automatismes et des images mentales.
L'exemple 2 indique le type de fonctions trigonométriques qu'on peut étudier. Par ailleurs, on étendra à la fonction tangente le type de calculs faits sur les fonctions sinus et cosinus (voir document d'accompagnement de première, page 65). On notera, en lien avec la physique, que les fonctions du type $\alpha\sin(\omega t + \varphi)$ sont des solutions de l'équation différentielle $y" + \omega^2 y = 0$).

Exemple 1. Un problème de robinet revisité

Considérons l'écoulement d'eau d'un robinet à débit constant. Lorsque l'eau qui s'écoule n'est pas turbulente, le jet possède sur une certaine longueur une forme stable bien régulière : quelle est cette forme ? Si on regarde cet écoulement, voit-on un ruban de largeur constante ?
L'observation (voir photo ci-dessous et l'expérience de chacun) montre que le « ruban » va en s'amincissant vers le bas. On veut étudier ce phénomène.



Supposons que le robinet se termine par une partie cylindrique de rayon intérieur r. Désignons par v_0 la vitesse de l'eau à la sortie. Alors, le débit du robinet, c'est-à-dire le volume d'eau qu'il expulse par unité de temps, vaut $D = \pi v_0 r_0^2$.
Nous supposons ce débit constant. On peut à ce stade comprendre qualitativement pourquoi le ruban va en s'amincissant : si le débit est constant, comme la vitesse de l'eau augmente (« l'eau tombe »), le rayon diminue. Cette constatation, immédiatement intuitive pour certains, ne permet cependant pas de prévoir comment va décroître le rayon : en $1/\ln(x)$, $1/x^2$, $1/x$, $1/\sqrt{x}$, etc. ? Quelqu'un qui n'a jamais fait le type de calculs proposés ci-dessous ne peut pas avoir l'intuition du type de décroissance qui va se produire.

Plus précisément : dès sa sortie du robinet, l'eau est en chute libre et pendant quelques instants, on peut négliger les forces de frottement. La vitesse à l'instant t et la distance $x(t)$ parcourue par une molécule d'eau s'écrivent respectivement, en prenant $x(0) = 0$:

$$v(t) = gt + v_0, \text{ et } x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t,$$

d'abord en exprimant la vitesse en fonction de x et ensuite en exprimant que le débit est constant à toutes les abscisses (il n'y a nulle part accumulation d'eau).
Pour arriver à la vitesse en fonction de x, on élimine t entre $v(t)$ et $x(t)$. Cela donne :

$$t = \frac{v(t) - v_0}{g} \text{ et } x(t) = \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2g}.$$

$$v(x) = v_0(1 + ax)^{1/2} \text{ avec } a = \frac{2g}{v_0^2} \quad (4).$$

Le débit s'écrit :

$$D = \pi r^2(x) v(x) \quad (5).$$

En éliminant v entre (4) et (5), on obtient :

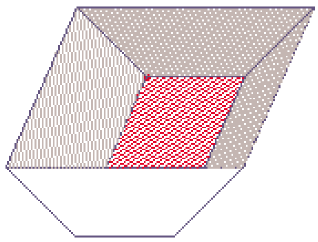
$$r(x) = \left(\frac{D}{\pi v(x)}\right)^{1/2} = \left(\frac{D}{\pi v_0 (1+ax)^{1/2}}\right) = r_0(1+ax)^{-1/4}.$$

La décroissance de r est ainsi dans un premier temps en $x^{-1/4}$. Mais le jet d'eau n'est pas stable sur une grande durée : il finit par se casser, et de toute façon, il faudrait pour une étude sur un temps plus long tenir compte des forces de frottement (voir paragraphe sur la chute des corps).

Voici quelques données numériques à ce propos, pour $r_0 = 0{,}05$ dm (D est en L/min).

x	0,1	0,5
D = 1	0,033	0,023
D = 2	0,042	0,032
D = 5	0,048	0,042

Exemple 2. Une feuille qu'on plie



On plie dans le sens de la longueur en trois parties égales une feuille de papier rectangulaire. Le rectangle du milieu reste posé sur la table (voir figure ci-contre).

Quelle même inclinaison par rapport à la table doit-on donner aux deux rectangles extérieurs si on veut que le volume de la portion d'espace limitée par la feuille, un plan horizontal posé sur les rectangles extérieurs et deux plans verticaux adossés à la feuille soit maximal ?
Que se passe-t-il si la largeur des rectangles extérieurs est différente de celle du rectangle horizontal ?

On appelle a la largeur des trois rectangles, c leur longueur et α l'angle entre la table et un des rectangles extérieurs, avec α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $V(\alpha) = ca^2 \sin\alpha\,(1 + \cos\alpha)$.

Le volume est maximal pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Dans le second cas, qui dépasse le niveau exigible, on appelle a la largeur des rectangles extérieurs et b la largeur du rectangle posé sur la table. On a : $V(a) = ca \sin\alpha\,(b + \alpha \cos \alpha)$. Le volume est maximal pour α tel que $\cos\alpha = u$ avec $u = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a}$ (on remarque que u est élément de]0, 1[pour tous a et b strictement positifs).

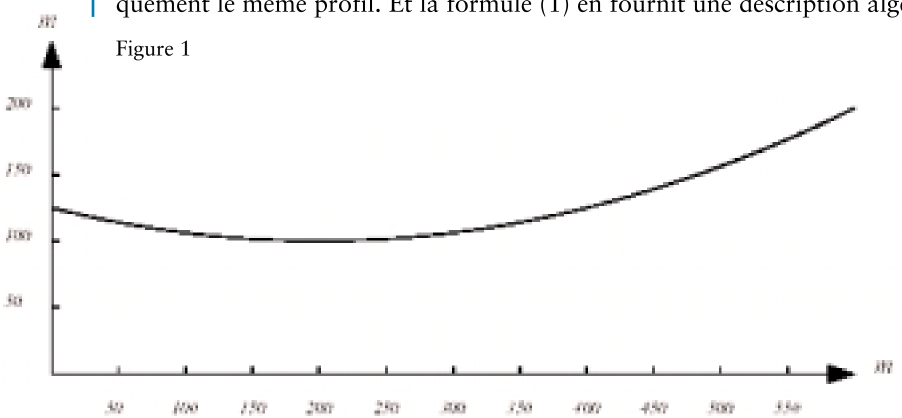
Calcul intégral

On trouvera ci-dessous une présentation du calcul intégral, dont l'objectif premier est une bonne compréhension du concept d'intégrale : on a veillé à la progressivité de cette présentation et à la diversité des points de vue ; on y a repéré certains sauts épistémologiques ; le lien entre calcul intégral et primitive y est particulièrement mis en valeur. On attend des élèves, au départ, qu'ils connaissent le lien de la dérivée d'une part avec la pente d'une tangente, et de l'autre avec la vitesse.

Un terrain

1. On connaît le profil
La figure 1 ci-dessous, sur laquelle les distances et les hauteurs sont indiquées en mètres, montre le profil d'un terrain. Le tableau 1, page suivante, décrit numériquement le même profil. Et la formule (1) en fournit une description algébrique.

Figure 1



d en m	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
$h(d)$ en m	125,00	114,06	106,25	102,10	100,00	102,10	106,25	114,07	125,00	139,06	156,25	176,56	200

Tableau 1

$$h(d) = \frac{d^2}{1600} - \frac{d}{4} + 125 \quad (1)$$

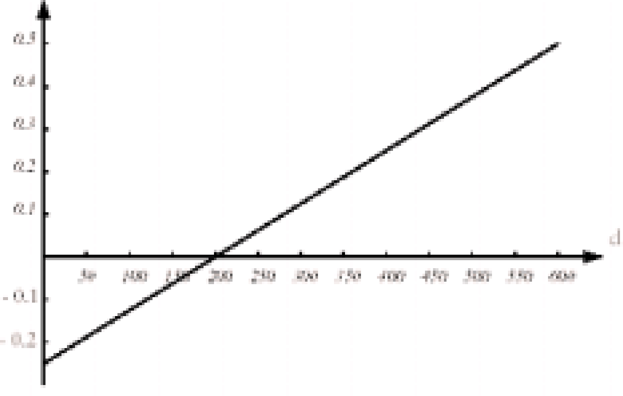
Question 1
On voudrait niveler le terrain décrit ci-dessus. À quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent exactement les déblais ?
On suggère de répondre à cette question dans un premier temps en ne se servant que de la figure 1. Ensuite, on ne s'appuiera que sur le tableau 1. Et enfin, on se servira uniquement de la formule (1).

Question 2
Toujours en ce qui concerne le même terrain, on demande d'évaluer sa pente en chaque point. On suggère à nouveau de répondre à la question en se servant uniquement d'abord de la figure 1, puis du tableau 1 et enfin de la formule (1).

Éléments de réponse
Le plus souvent, lorsque les élèves doivent trouver l'aire sous une courbe en ne disposant que du graphique de celle-ci, ils remplissent approximativement la surface en question par un assemblage de rectangles et de triangles, dont ils additionnent ensuite les aires.
Le fait de partir du tableau 1 les porte à utiliser des rectangles ou des trapèzes jointifs dont ils additionnent les aires.
S'ils ne connaissent pas encore l'usage de la primitive pour intégrer, ils n'ont pas d'autre recours, au vu de la formule (1), que de revenir à la vue graphique ou à la vue numérique des choses.
Dans cette question, l'intégrale est une aire au sens propre du terme : quelque chose que l'on peut évaluer en m^2.
Il n'y a aucune chance que les élèves évoquent la fonction aire, c'est-à-dire la fonction qui donne l'aire sous la courbe entre l'origine et une abscisse courante. *A fortiori*, ils n'identifieront pas la hauteur du terrain au taux de variation de la fonction aire.
Par conséquent, la question posée conduit à associer fortement la notion d'intégrale à celle d'aire, mais elle ne suggère en aucune façon la réciprocité de l'intégrale et de la dérivée.

2. On connaît la pente

Figure 2



La figure 2, sur laquelle les distances sont indiquées en mètres, montre la pente d'un sentier sur une distance de 600 m. Le tableau 2 fournit numériquement les mêmes pentes. Et la formule (2) en fournit une description algébrique.

d en m	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
$p(d)$ en m	-0,25	-0,1875	-0,125	-0,625	0,000	0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,3750	0,4375	0,5

Tableau 2

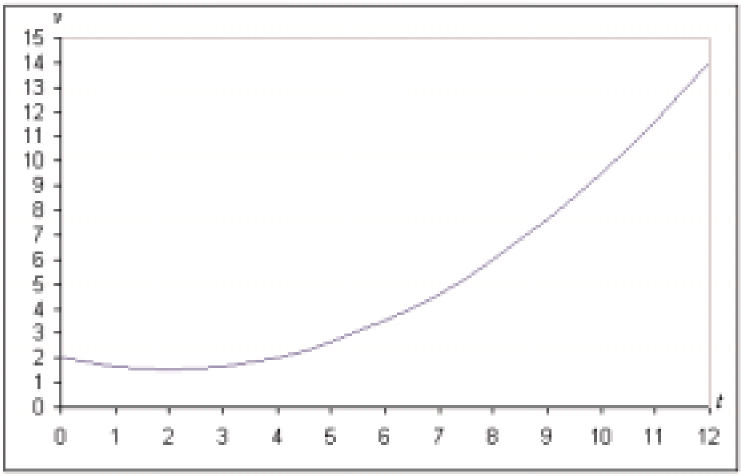
$$p(d) = \frac{d}{800} - \frac{1}{4} \quad (2)$$

Question 3
La figure 2 donne les pentes. Il n'est donc pas possible de construire le profil sur cette figure. On s'attend donc à ce que les élèves commencent tout de suite un graphique du profil.
Une première façon consiste à choisir une hauteur de départ, puis à avancer pas à pas sur de petites distances, sur chacune desquelles on maintient une pente constante, donnée par la courbe des pentes.
Une deuxième façon consiste à dessiner, dans le système d'axes où on veut représenter le profil, un champ d'éléments de contact, puis à dessiner le profil à vue en partant d'une hauteur choisie arbitrairement à l'abscisse 0.
Des réponses analogues peuvent être développée au départ du tableau 2.
D'autre part, s'ils sont déjà familiers de la dérivée et de son interprétation comme pente d'une tangente, ils ont une petite chance d'arriver à penser que l'anti-dérivée de la fonction (2) peut les aider à trouver le profil.
Dans cette question, la pente est une vraie pente : elle prend son sens dans le champ supposé uniforme de la pesanteur.
Notons enfin que les élèves n'ont aucune chance d'interpréter la fonction aire sous le graphique des pentes comme donnant le profil du terrain.

Un mouvement

1. On connaît la vitesse
La figure 3 donne la vitesse d'un mobile pendant un intervalle de temps de 12 secondes. Le tableau 3 fournit la même information numériquement, et la formule (3) l'exprime algébriquement.

Figure 3



t en s	$v(t)$ en m/s
0	2
1	1,625
2	1,5
3	1,625
4	2
5	2,625
6	3,5
7	4,625
8	6
9	7,625
10	9,5
11	11,625
12	14

Tableau 3

$$v(t) = \frac{t^2}{8} - \frac{t}{2} + 2 \quad (3)$$

Question 4
Déterminer, en fonction du temps, l'espace parcouru par le mobile. Dans un premier temps, on résoudra la question en ne s'appuyant que sur la figure 3. Ensuite on partira du tableau 3, et enfin de la formule (3).
Déterminer les positions connaissant les vitesses pourrait s'avérer utile par exemple à un bateau perdu au milieu de l'océan par temps de brouillard et avec tous ses instruments de navigation en panne. On suppose toutefois que le bateau serait encore capable de mesurer sa vitesse par rapport à l'eau.

Éléments de réponse
La vitesse et l'espace parcouru sont des notions assez familières. On s'attend à ce que, devant établir l'espace parcouru en fonction du temps, les élèves commencent par dessiner des axes gradués en secondes et en mètres. Une première façon de répondre à la question consiste à enchaîner des mouvements uniformes de durées brèves. Une autre

consiste à dessiner un champ d'éléments de contact et à tracer à l'estime le diagramme des espaces parcourus. Dans les deux cas, il faut choisir une position de départ.
Si les élèves sont familiers de la dérivée, ils ont une chance de penser à la primitive de la fonction (3).
Notons qu'ici les positions sont de vraies positions : elles se mesurent – à l'échelle –, en mètres à partir d'une origine. Mais les pentes ne sont pas de vraies pentes.
Les élèves n'ont dans un premier temps aucune chance d'identifier la fonction aire (qui n'est pas une vraie aire) sous la courbe des vitesses, comme donnant les positions du mobile.

2. On connaît la masse et la force
Un objet pesant 1 kg est soumis pendant 12 secondes à une force donnée en fonction du temps par la figure 4. La même force est donnée de seconde en seconde par le tableau 4. Elle est enfin exprimée algébriquement par la formule (4).

t en s	$f(t)$ en N
0	-0,5
1	-0,25
2	0
3	0,25
4	0,5
5	0,75
6	1
7	1,25
8	1,5
9	1,75
10	2
11	2,25
12	2,5

Tableau 4

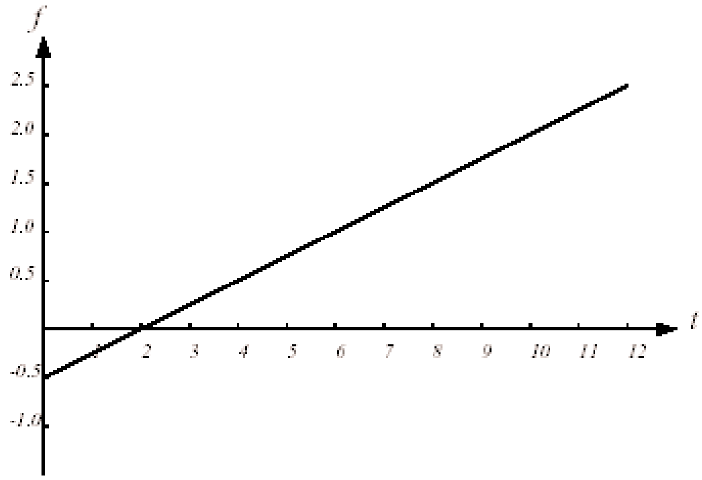


Figure 4

$$f(t) = \frac{t}{4} - \frac{1}{2} \quad (4)$$

Question 5
Déterminer, en fonction du temps, d'abord l'accélération du mobile, puis sa vitesse et enfin sa position. On résoudra la question par le moyen qui apparaîtra le plus commode.
Déterminer les positions à partir de la force s'avère utile dans les circonstances suivantes : dans un sous-marin en plongée, incapable de mesurer sa vitesse par rapport à l'eau et ayant perdu l'usage de tous ses autres instruments de navigation, on mesure l'accélération du bâtiment par la déformation d'un ressort auquel une masse est accrochée. Il s'agit là effectivement au départ d'une mesure de force. Un tel dispositif ne peut être utilisé que dans un mouvement en ligne droite. Dans la pratique, on mesure trois composantes de la force à l'aide d'un dispositif gyroscopique.

Éléments de réponse
Puisque la masse du corps mentionné dans l'énoncé est égale à 1 kg, l'accélération est numériquement égale à la force. Et donc le graphique de l'accélération s'obtient à partir de celui de la force en considérant que l'axe des ordonnées est gradué, non plus en newton, mais en m/s^2.
L'accélération est un concept beaucoup plus abstrait que la vitesse : elle est le taux de variation de cette dernière. Peut-on espérer que les élèves, ayant déjà à ce stade résolu quelques problèmes d'intégration dans des contextes divers, arriveront à choisir leur méthode en connaissance de cause : le passage par les primitives s'impose dans ces conditions.

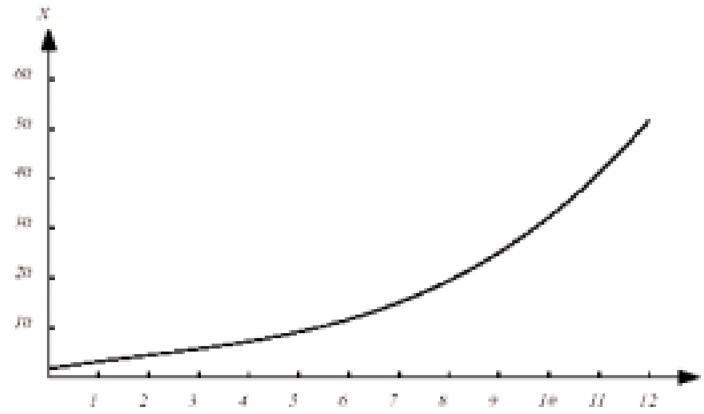
3. On connaît le mouvement

La figure 5, sur laquelle les distances sont indiquées en mètres et les temps en secondes, décrit le mouvement d'un mobile pesant 1 kg pendant un intervalle de temps de 12 secondes. Le tableau 5 décrit numériquement le même mouvement. Et la formule (5) en fournit une expression algébrique.

Figure 5

t en s	$f(t)$ en N
0	2,0000
1	3,7917
2	5,3333
3	6,8750
4	8,6667
5	10,9583
6	14,0000
7	18,0417
8	23,3333
9	30,1250
10	38,6667
11	49,2083
12	62,0000

Tableau 5



$$f(t) = \frac{t^3}{24} - \frac{t^2}{4} + 2t + 2 \quad (5)$$

Question 6

Déterminer, en fonction du temps, la force qui a été nécessaire pour communiquer ce mouvement au mobile.

Une question analogue – et peut-être motivante pour certains élèves –, pourrait être : quelle force doit développer un moteur pour communiquer à une auto de 800 kg, en 12 secondes, une vitesse de 80 km/h ?

Ces deux questions se résolvent par de simples dérivations. Nous les proposons ici dans l'idée que, pour bien comprendre le théorème fondamental de l'analyse, il est bon d'avoir pratiqué autant l'aller que le retour.

Commentaires

Il s'agit d'un ensemble de questions stylisées à l'extrême et très systématiques. Les fonctions en jeu sont simples, de sorte que les élèves se concentrent sur la nature des phénomènes, plutôt que sur des difficultés techniques.

Les contextes évoqués sont porteurs d'intuitions significativement différentes et complémentaires. Les concepts étudiés – les dérivées successives, les intégrales successives et les primitives –, trouvent leur plénitude de sens dans les liens qu'ils entretiennent entre eux, mais aussi dans les questions concrètes qu'ils éclairent (terrain et mouvement). D'autre part, les trois modalités d'expression des données – graphique, tableau et formule –, induisent des procédés de résolution porteurs de sens eux aussi, et de technicités variées. Il faut avoir quelquefois laborieusement intégré une fonction par voie graphique ou numérique pour saisir le miracle de la primitive, qui ramène l'intégration à une simple différence.

Le lien implicite aux équations différentielles est aussi à souligner : les équations différentielles les plus simples sont sans doute celles de la forme $f'(t) = g(t)$ et elles ont pour expression géométrique un champ d'éléments de contact.

Le principe général que ces quelques questions ont aussi pour fonction d'illustrer est qu'une certaine richesse de liens conceptuels provoque la mobilité de la pensée et la joie de réfléchir.

Cette présentation sera complétée par l'approche théorique demandée par le programme : par encadrement à l'aide de deux suites adjacentes. On pourra également s'inspirer du travail sur l'aire sous une arche de parabole présenté dans le document d'accompagnement de l'option de la série L ; ce dernier document propose notamment une démonstration par les aires de la relation fonctionnelle caractéristique des logarithmes.

Géométrie

Nombres complexes

L'introduction des racines « imaginaires » des nombres négatifs permet de trouver des solutions aux équations réelles du second degré à discriminant négatif. Mais ce n'est pas pour cela qu'elles ont d'abord été introduites. En effet, les formules de résolution de l'équation du deuxième degré n'ont pas de sens dans le cadre réel précisément lorsque l'équation n'a pas de racines réelles. Il peut alors paraître artificiel de parler de racines dans un cadre étendu dont rien ne motive ou ne justifie l'existence.
Mais le troisième degré nous confronte à une situation très différente. Rappelons que la formule de résolution de l'équation du troisième degré $x^3 + ax = b$ a été obtenue au début du XVIe siècle par Scipione dal Ferro, sous la forme :

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Il est remarquable de constater que c'est dans le cas où l'équation a trois racines réelles que le discriminant $\Delta = 27b^2 + 4a^3$, qui figure sous le radical, est négatif. Par conséquent, c'est dans le cas où le nombre de racines réelles est maximal que la formule de résolution n'a plus de sens. Ce fait troublant a été constaté par les algébristes italiens peu après la découverte de dal Ferro, puisque vers la fin du XVIe siècle, Bombelli, en appliquant la formule à l'équation $x^3 = 15x + 14$, ose écrire l'égalité $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ et donne correctement les règles de calcul des nombres complexes, sans employer toutefois la notation moderne. Remarquons, pour interpréter convenablement l'égalité ci-dessus, que $(2 + i)^3 = 2 + 11i$.

Cette extension du champ numérique n'a bien sûr été admise que progressivement, et il ne pouvait en être autrement puisqu'à l'époque les nombres négatifs eux-mêmes n'avaient pas acquis droit de cité, ce qui conduisait les algébristes à considérer différents cas là où nous ne voyons qu'une seule équation. Sous la plume de Leibniz, pourtant innovateur et utilisateur des nombres complexes, nous lisons un siècle plus tard : « Ces expressions ont ceci d'admirable que dans le calcul elles n'enveloppent rien d'absurde ni de contradictoire, et que cependant on ne peut en donner d'exemple dans la nature, c'est-à-dire dans les choses concrètes. » L'histoire fournit divers exemples du cheminement qui part d'un besoin mathématique et, par la mise au point d'un outil, la définition d'une notation, le dégagement d'un concept, parvient à la formalisation d'une nouvelle notion. Le calcul complexe, dont on a constaté l'efficacité avant de pleinement la comprendre, illustre ce cheminement.
La terminologie moderne a reçu en héritage de l'embarras des précurseurs la terminologie des nombres « imaginaires », qui à vrai dire ne sont pas plus imaginaires que les nombres réels ne sont réels. L'exponentielle complexe, entrevue par Leibniz et étudiée par Euler, puis la correspondance entre points du plan et nombres complexes, certainement évidente pour le jeune Gauss quand il démontre en 1797 que tout polynôme à coefficients complexes a une racine complexe, ont cependant contribué à dissiper le mystère qui entourait encore cette notion. Les élèves du XXIe siècle, qui la découvrent par l'intermédiaire du plan complexe, devraient accepter facilement qu'un objet mathématique dont ils possèdent une représentation si commode puisse être manipulé sans risque de contradiction.

Concluons sur la formule de dal Ferro en rappelant qu'Euler a montré comment choisir les déterminations des racines cubiques qui figurent dans la formule pour obtenir trois racines et non neuf, puis que Lagrange a observé que l'expression $(x_1 + jx_2 + j^2x_3)^3$, où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine cubique de l'unité, ne prend que deux valeurs distinctes lorsqu'on permute les racines x_1, x_2, x_3 de l'équation. Cette remarque cruciale, qui permet de ramener le troisième degré au deuxième et explique l'existence de la formule de résolution, servira de point de départ à Galois qui montre en 1830 l'impossibilité de la résolution par radicaux de l'équation générale du cinquième degré. Sa démonstration, qui repose sur l'analyse de l'ensemble des permutations des cinq racines, est l'acte de naissance de la théorie des groupes.

Calculer dans $\mathbb{C}$

Le point M du plan de coordonnées (a,b) peut être identifié naturellement d'une part au vecteur $\overrightarrow{OM}$ et d'autre part au nombre complexe $a + ib$. Cette identification montre que $a + ib = 0$ si et seulement si $a = b = 0$. L'addition des nombres complexes correspond dans cette identification à l'addition des vecteurs, déjà connue des élèves. On s'autorisera à exprimer en termes complexes les notions affines déjà rencontrées par les élèves : milieu de deux points, barycentres. Notons que l'identification entre nombres complexes et points du plan aide à comprendre pourquoi on ne peut pas comparer deux nombres complexes. Les élèves doivent être convaincus du fait que i n'est ni plus petit, ni plus grand que 0.

En posant $i^2 = -1$, on déduit la formule de multiplication de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Il est essentiel que les élèves comprennent que les parties réelle et imaginaire d'un produit ne sont pas les produits des parties réelles et imaginaires des facteurs, d'autant plus qu'une confusion est à craindre avec l'expression du produit scalaire de deux vecteurs. Après avoir introduit les règles du calcul algébrique sur les nombres complexes, on les interprétera géométriquement, en commençant par les cas simples : on montrera que la multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel k correspond à une homothétie de centre O et de rapport k, cependant que la multiplication par i induit la rotation d'angle $\pi/2$, ce qui devrait convaincre les élèves que la multiplication par un nombre complexe représente une transformation du plan dans lui-même. Dans l'enseignement de spécialité, cette méthode sera systématiquement utilisée dans l'étude des similitudes planes.

On introduira le conjugué d'un nombre complexe et son module, et on montrera par un calcul direct que si $z \neq 0$ alors $1/z = \bar{z}/|z|^2$. On remarquera que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est égale au module de l'affixe de M, et donc que, d'après l'inégalité triangulaire, on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

On ne s'interdira pas de parler du « corps des complexes » et d'expliquer brièvement la signification du mot « corps » dans ce contexte. Mais il est clair qu'aucune connaissance dans ce domaine n'est exigible. Notons au passage que cette structure de corps dont on équipe le plan n'a pas d'analogue dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Il est facile de constater que tout polynôme du deuxième degré à coefficients réels a deux racines dans $\mathbb{C}$ (éventuellement confondues en une racine réelle). La résolution des équations du deuxième degré à coefficients complexes n'est pas au programme. L'énoncé du théorème de d'Alembert-Gauss est susceptible d'intéresser les élèves de ce niveau, mais on ne saurait y faire allusion que très brièvement.

L'exponentielle complexe

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe de module 1. On a donc $x^2 + y^2 = 1$, et la paramétrisation du cercle unité, bien connue des élèves, permet d'affirmer l'existence d'un angle θ, défini à un multiple de 2π près, tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

Les formules de trigonométrie déjà étudiées énoncent que

$$\sin(\theta + \theta') = \sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta' \quad (1)$$

et

$$\cos(\theta + \theta') = \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' \quad (2).$$

Si l'on pose *a priori*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (3)$$

les formules (1) et (2) ci-dessus permettent de montrer immédiatement que :

$$e^{i(\theta + \theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}.$$

Cette équation justifie *a posteriori* la notation exponentielle complexe, puisque les élèves ont vu en analyse que les fonctions exponentielles étaient caractérisées par leur équation fonctionnelle. Il parait difficile à ce niveau de procéder à une justification plus rigoureuse de l'égalité (3), qui nécessiterait l'usage des développements en série. Par contre, il est crucial de parler de l'argument d'un nombre complexe, défini à $2k\pi$ près, et de s'assurer que les élèves connaissent et savent utiliser la forme polaire $z = |z|e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}$.

La formule (3) permet en retour de retrouver très facilement les formules d'addition (1) et (2), et les formules de duplication qui en sont un cas particulier. Les élèves devraient apprécier ce moyen de soulager leur mémoire.

Les questions liées à la mesure des angles et au logarithme complexe sont délicates. Terminons ce paragraphe par un hommage à Leibniz, qui écrivait en 1712 : « Pour n'être ni positif ni négatif, il faut que le logarithme de – 1 ne soit pas véritable mais imaginaire. C'est pourquoi le rapport qui lui correspond ne sera pas véritable mais imaginaire. En voici une autre preuve. S'il existait un vrai logarithme de – 1, c'est-à-dire du rapport de – 1 à + 1, en le divisant par deux nous obtiendrions le logarithme de $\sqrt{-1}$, or $\sqrt{-1}$ est une quantité imaginaire. Nous aboutirions donc au logarithme véritable d'une quantité imaginaire, ce qui est absurde. »

Nombres complexes et problèmes géométriques

Ce document propose d'introduire les nombres complexes comme affixes des points du plan. Il devient dès lors évident qu'une fonction affine de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ correspond à une transformation du plan dans lui-même. On pourra attirer l'attention sur le fait que le graphe d'une telle application n'est pas accessible à la visualisation puisque l'espace physique ne nous prodigue que trois dimensions. Mais il est important que les élèves sachent reconnaître la forme complexe des translations, des rotations et des homothéties du plan, et l'utiliser dans le cadre de problèmes géométriques simples. Une étude plus poussée des similitudes et de la composition de ces transformations est réservée à l'enseignement de spécialité.

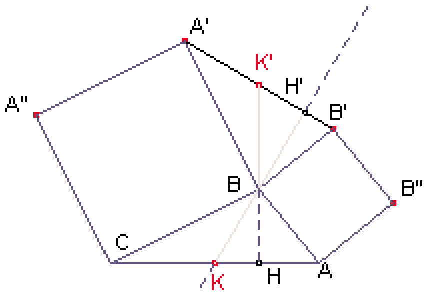
Exemples de problèmes géométriques

Les exemples proposés ci-dessous sont classiques ; ils illustrent plus particulièrement le paragraphe introductif du chapitre II.2 de géométrie du programme : « mettre en œuvre toutes les connaissances de géométrie de l'ensemble du cursus scolaire » ; « privilégier les problèmes dont les procédés de résolution peuvent avoir valeur de méthode » ; « choisir l'outil de résolution le plus pertinent »… Le procédé de construction de ces exemples (compléter un triangle, un quadrilatère à l'aide de triangles ou quadrilatères de même nature) permet de présenter des situations à la fois élémentaires et intéressantes. Dans le cas où l'on souhaite privilégier le traitement avec les nombres complexes, on n'oubliera pas de solliciter d'abord l'intuition des élèves : l'observation des figures permet de conjecturer les propriétés et d'orienter le calcul pour les démontrer.

Des carrés autour d'un triangle

Situation 1

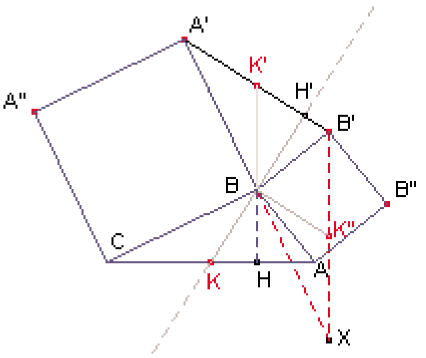
Soit ABC un triangle quelconque ; on construit à l'extérieur de ce triangle les carrés ABB'B" et CBA'A".



Alors la médiane issue de B du triangle ABC est aussi hauteur du triangle BB'A' (et symétriquement, la médiane issue de B du triangle BA'B' est aussi hauteur du triangle ABC).

– La preuve est immédiate à l'aide des nombres complexes. Dans le plan complexe d'origine B, $\overrightarrow{BK}$ a pour affixe $(a + c)/2$; B' et A' ont pour affixes respectives ia et $-ic$ et donc $\overrightarrow{B'A'}$ a pour affixe $i(a + c)$: d'où le résultat. Le calcul prouve en outre que A'B' = 2BK.

– On obtient une autre solution à l'aide de la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



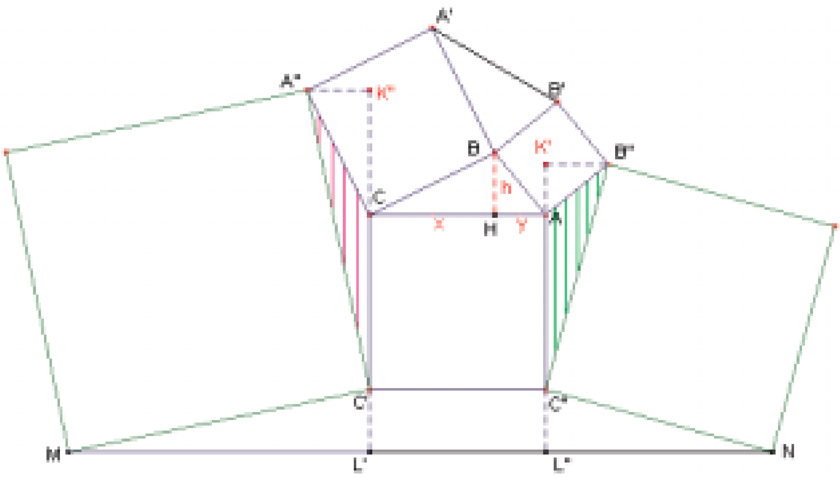
Soit B'BX l'image du triangle ABC par cette rotation. Les points A', B et X sont alignés. Soit K" l'image de K, alors (BK")//(A'B') puisque B et K" sont les milieux de deux côtés du triangle XA'B'. (BK") est perpendiculaire à (BK) : d'où le résultat.

– On peut aussi traiter le problème à l'aide du produit scalaire : $2\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{A'B'} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}).(\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA'}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA'} = 0$, puisque les deux produits scalaires $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA'}$ sont égaux (définition du produit scalaire).

Remarque – On peut aussi s'intéresser à la nature du triangle KO_1O_2, où O_1 et O_2 sont les centres des deux carrés ; on prouve que celui-ci est rectangle isocèle.

Situation 2

On construit des carrés sur les côtés *A"C'* et *B"C"* extérieurs à la figure (dessin ci-dessous). Le parallélisme de (*MN*) et (*AC*) semble flagrant. Comment le prouver ?



– Preuve avec les nombres complexes.

Dans le plan complexe d'origine *B*. Soient *a* et *c* les affixes des points *A* et *C*. On calcule facilement les affixes des points *A"* $[c(1 - i)]$, *C'* $[c - i(a - c)]$, *B"* $[a(1 + i)]$, *C"* $[a - i(a - c)]$ puis celles de *M* et *N*. On aboutit à *MN* d'affixe $4(a - c)$. D'où le parallélisme conjecturé ; on a de plus $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{CA}$.

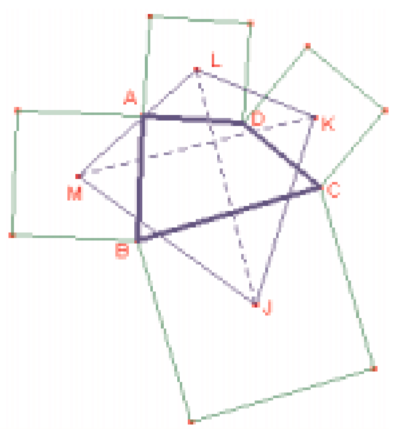
– La solution géométrique est plus délicate.

Soit *H* le pied de la hauteur issue de B et posons $CH = x$, $HA = y$ et $BH = h$.

Considérons les projections orthogonales L' et K'' des points M et A'' sur la droite (CC') d'une part et les projections orthogonales L'' et K' des points N et B'' sur la droite (AC''). Par rotation de centre C, on obtient $A''K'' = BH = h$. Il est facile d'établir que les triangles $C'A''K''$ et $MC'L'$ sont isométriques d'où $C'L' = h$. On établit de même que $C''L'' = h$ ce qui permet de conclure que $C'L'L''C''$ est un rectangle et que $(MN) // (CA)$. On obtient facilement $MN = 4CA$ (en effet $ML' = C'K'' = AC + x$; $NL'' = AC + y$;…).

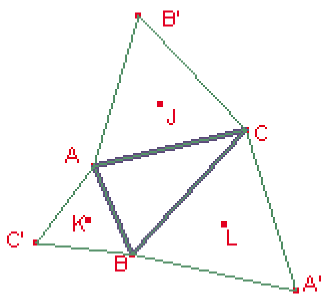
On trouvera sur le cédérom joint des situations complémentaires.

Des carrés autour d'un quadrilatère



On construit les 4 carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés d'un quadrilatère.
Soient M, J, K et L leurs centres.
Les diagonales du quadrilatère $MJKL$ sont égales et perpendiculaires.
$MJKL$ est un carré lorsque $ABCD$ est un parallélogramme.
Le traitement complexe, bien que calculatoire, permet ici de conclure très vite. On peut aussi utiliser une rotation d'angle droit et de centre le milieu de $[BD]$, et s'appuyer sur la remarque de la situation 1 ci-dessus.

Des triangles équilatéraux autour d'un triangle



À l'extérieur d'un triangle ABC, on construit les triangles équilatéraux qui s'appuient sur les côtés.
On note J, K et L les centres de ces triangles équilatéraux.
Les triangles ABC, $A'B'C'$ et JKL ont même centre de gravité.
Le triangle JKL est équilatéral.
Là aussi, le traitement complexe s'avère très efficace.
Une résolution à l'aide de rotations est plus délicate (elle suppose l'intervention d'une composée de rotations, notion peu familière pour la plupart des élèves).

Géométrie dans l'espace

Une présentation possible du produit scalaire dans l'espace

Lors de l'étude du produit scalaire dans le plan, il a été établi que lorsque le plan était rapporté à une base orthonormale, le produit scalaire du vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (x,y) et du vecteur $\vec{v}'$ de coordonnées (x',y') était égal à : $\vec{v}.\vec{v}' = xx' + yy'$.
On peut introduire le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace en étendant cette formule aux triplets de coordonnées. Donc, si l'espace est rapporté à une base orthonormale, le produit scalaire du vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (x,y,z) et du vecteur $\vec{v}'$ de coordonnées (x',y',z') est égal à : $\vec{v}.\vec{v}' = xx' + yy' + zz'$. (1)

Pour comprendre que cette définition est intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de la base orthonormale choisie, on observe que d'après le théorème de Pythagore, lorsqu'un vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées (x,y,z) dans une base orthonormale, alors le carré $\|\vec{v}\|^2$ de

sa longueur est donné par : $\|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Or $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}.\vec{v}$. Un calcul direct établit alors que : $\vec{v}.\vec{v}' = \frac{1}{2}\left[\|\vec{v}+\vec{v}'\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}'\|^2\right]$ (2).
Cette expression montre également que la restriction à un plan du produit scalaire, tel qu'on vient de le définir dans $\mathbb{R}^3$ coïncide avec la notion déjà définie et étudiée dans le plan. D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, $\vec{v}.\vec{v}' = 0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont perpendiculaires. Puisque la formule (2) montre que la notion définie étend le cas plan, on peut parler de l'angle θ entre deux vecteurs de l'espace, à l'aide de la formule : $\vec{v}.\vec{v}' = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v}'\| \times \cos\theta$.

On pourra noter la difficulté liée à l'absence d'orientation naturelle sur un plan de l'espace, qui fait qu'on ne définit cet angle qu'au signe près.
La formule (1) permet de vérifier immédiatement que le produit scalaire est symétrique et bilinéaire. On pourra retrouver, grâce à cette propriété de bilinéarité, des résultats vus en classe de seconde tels la caractérisation d'une droite orthogonale à un plan (« un vecteur est orthogonal (ou normal) à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan ») ou le théorème dit « des trois perpendiculaires ».

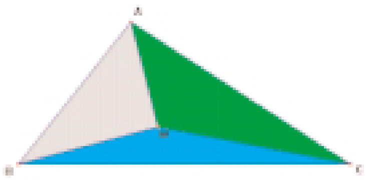
Droites et plans de l'espace

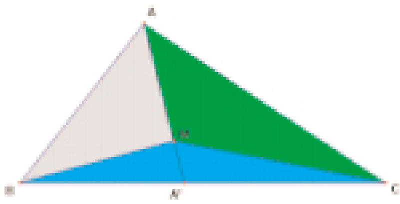
Au cours de leur scolarité, les élèves ont étudié des objets simples du plan et de l'espace (droites, plans, cercles, sphères, triangles) à l'aide de méthodes diverses. En terminale, l'objectif est de prolonger cette étude en équilibrant les points de vue algébrique et géométrique.
Un point essentiel est la capacité à traduire en langage algébrique les problèmes géométriques et, inversement, d'interpréter géométriquement les calculs algébriques. Il n'y a pas lieu d'établir une opposition entre les méthodes de géométrie pure et les méthodes de géométrie analytique (calcul vectoriel ou calcul avec de coordonnées) : dans les deux cas, les élèves doivent améliorer leur vision des relations entre objets mathématiques, ceux-ci pouvant être aussi bien des objets géométriques que leurs représentations analytiques (coordonnées, équations). À ce titre, on pourra donner des exemples de démonstrations de propriétés géométriques à l'aide de ces deux méthodes.
Les élèves traiteront de situations où il s'agit, à partir de points, droites, plans… donnés dans un repère par leurs coordonnées ou leurs équations, d'en déterminer d'autres caractérisées par des conditions géométriques. Pour ce faire, on se placera toujours dans un repère orthonormal.
Ces exercices aident à renforcer les capacités des élèves dans les calculs algébriques, mais leur intérêt va au-delà de l'aspect mécanique des calculs : les élèves apprennent ainsi à organiser leurs calculs et à les présenter de façon à mettre en évidence la signification géométrique de chaque étape. On insistera sur le fait qu'un exercice de géométrie analytique ne consiste pas à enchaîner sans commentaire des calculs formels, mais au contraire d'expliquer clairement ce que l'on est en train de calculer.
Ces problèmes sont indissociables de l'étude des systèmes linéaires : les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues s'interprètent comme des intersections de deux droites du plan, les systèmes de deux ou trois équations linéaires à trois inconnues comme des intersections de deux ou trois plans de l'espace. Il n'est pas demandé d'étude générale des systèmes linéaires 3 × 3 (la méthode du pivot de Gauss n'est pas au programme, l'utilisation systématique et codifiée d'opérations élémentaires sur les lignes non plus) ; les systèmes liés à tel ou tel problème seront résolus avec les mêmes méthodes que celles utilisées antérieurement pour les systèmes 2 × 2 (substitution ou combinaison élémentaire) en veillant à contrôler les équivalences entre les systèmes écrits : l'objectif est donc ici que les élèves acquièrent une maîtrise raisonnée des systèmes linéaires à deux ou trois inconnues sans qu'il soit nécessaire de viser une mécanisation complète des calculs.
On utilisera les diverses représentations des droites et des plans : caractérisation barycentrique ; équation cartésienne d'un plan de l'espace ; représentation paramétrique ou parfois système de deux équations cartésiennes d'une droite de l'espace ; et, bien sûr, équation cartésienne ou représentation paramétrique d'une droite du plan (cette dernière notion étant à présenter en même temps dans le plan et l'espace).

Certains problèmes mettront en œuvre la notion de partie convexe (le terme lui-même n'est pas au programme), sous-jacente à la définition du segment [AB] (resp. du triangle plein ABC) comme ensemble des barycentres à coefficients positifs de A et B (resp. de A, B, C). On pourra retrouver cette notion lors de situations se traitant à l'aide de demi-espaces ou de demi-plans : ce sera l'occasion d'aborder des systèmes simples d'inéquations linéaires.
On continuera à traiter de situations planes, dans le prolongement de ce qui a été fait en première et en cohérence avec les autres parties du programme (nombres complexes, équations différentielles…).

1) Le tétraèdre : étude géométrique ou étude algébrique (avec produit scalaire, ou dans un repère convenablement choisi).
– Étude du tétraèdre régulier ABCD (en liaison avec la molécule de méthane CH_4, dans laquelle l'atome de carbone occupe le centre de la molécule et les quatre atomes d'hydrogène sont disposés à égale distance du centre et sont équidistants entre eux) : orthogonalité des arêtes opposées ; hauteurs (AA'), (BB')… où A' (resp. B'…) est le centre de la face BCD (resp. CDA…) ; calcul de l'angle $\widehat{BOC}$; recherche du point A" de [AA'] tel que l'angle $\widehat{BA''C}$ soit droit…
– Condition pour que les hauteurs d'un tétraèdre soient concourantes : il faut et il suffit que deux couples d'arêtes opposées soient orthogonales, le troisième couple l'est alors aussi. (On dit alors que le tétraèdre est orthocentrique.)
– Condition pour que les arêtes opposées d'un tétraèdre aient même longueur : il faut et il suffit que les bimédianes (droites joignant les milieux de deux arêtes opposées) soient perpendiculaires aux arêtes opposées.

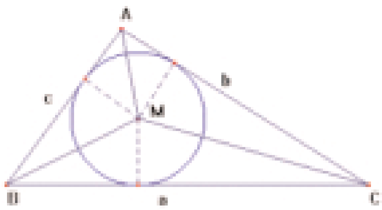
2) Ensemble de points équidistants.
– Ensemble des points équidistants de deux points (plan médiateur).
– Ensemble des points équidistants de trois points non alignés (résolution géométrique, résolution analytique) ; dans le cas où les trois points sont dans un plan parallèle à l'un des plans de base du repère, équation du cylindre perpendiculaire à ce plan, de base le triangle défini par ces points.
– Ensemble des points équidistants de quatre points non coplanaires (résolution géométrique, résolution analytique) ; sphère circonscrite à un tétraèdre.
– Ensemble des points équidistants de deux plans.





3) Élection au pays des Cartes (exemple 1 du document d'accompagnement de première ES, p. 21-22) : géométrie analytique.

4) Recherche des points du plan où passent deux tangentes à une parabole (resp. à un cercle) faisant un angle droit.



5) Caractérisation barycentrique d'un point M intérieur à un triangle ABC, avec des aires.
M est barycentre des points A, B et C pondérés respectivement par les aires des triangles MBC, MCA et MAB.

Indication : on montre dans un premier temps que A' est barycentre de B et C pondérés respectivement par les aires de MCA et MAC. Pour cela, on établit les égalités suivantes $\frac{A'B}{A'C}=\frac{\mathcal{A}(MA'B)}{\mathcal{A}(MA'C)}=\frac{\mathcal{A}(AA'B)}{\mathcal{A}(AA'C)}=\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)}$ (la dernière égalité se déduisant de l'avant-dernière), d'où l'on déduit : $\mathcal{A}(AMC)\overrightarrow{A'B}+\mathcal{A}(AMB)\overrightarrow{A'C}=0$.

Application : le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c) où a, b et c sont les longueurs des côtés opposés à A, B et C est le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC.
Problème : Recherche du centre d'inertie d'un triangle formé de barres de métal homogènes et de même section.

6) Représentation d'objets pondérés selon 3 critères a, b, c (resp. 4 critères a, b, c, d).

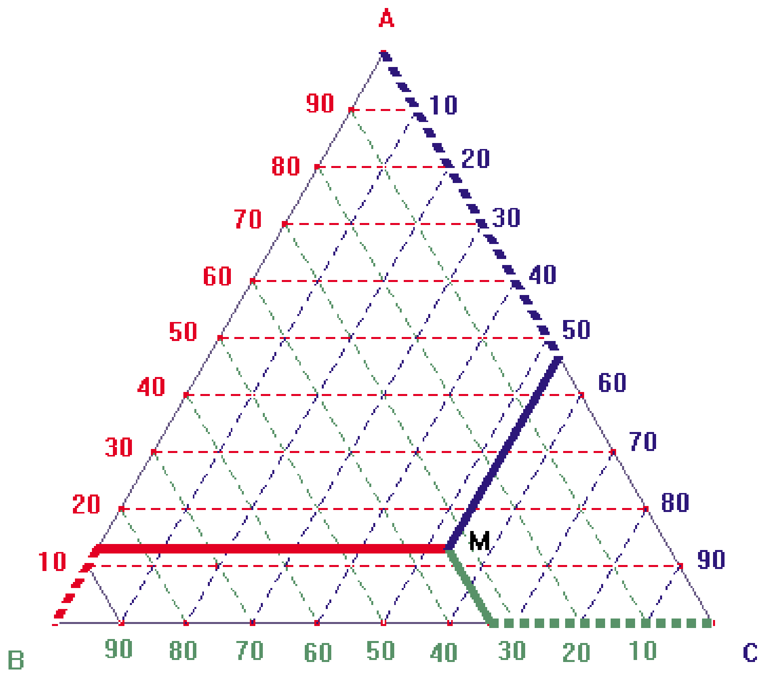


Diagramme triangulaire
(Le triangle ABC ci-contre est équilatéral.)
Expliquer pourquoi le point M est barycentre de A, B et C pondérés par les coefficients respectifs (lus sur le diagramme) 12, 34 et 54. (Faire le lien avec l'exemple 5 ci-dessus ; justifier ici que les aires des triangles MBC, MCA et MAB sont proportionnelles aux segments en pointillés gras respectivement rouge, vert et bleu ; observer que la somme des longueurs des trois segments en pointillés est constante et égale à la longueur du côté du triangle équilatéral, chaque côté étant gradué de 0 à 100.)
Ce type de schéma permet par exemple de situer des pays en fonction de la répartition en pourcentage de leur population selon les trois critères : (a) moins de 20 ans, (b) 20 à 50 ans, (c) au-delà de 50 ans ; les pays « jeunes » seront plus proches de A et les pays « vieux » plus proches de C.

Diagramme tétraédrique
On peut de façon analogue montrer que tout point M intérieur au tétraèdre régulier ABCD est barycentre des sommets A, B, C et D pondérés par les volumes respectifs de MBCD, MCDA, MDAB et MABC, et construire des diagrammes tétraédriques adaptés à une répartition selon 4 critères.

7) Du triangle rectangle au tétraèdre trirectangle
OABC est un tétraèdre tels que les arêtes OA, OB et OC soient deux à deux orthogonales. Le théorème de Pythagore relatif aux longueurs des côtés du triangle rectangle a un analogue avec les aires des faces du tétraèdre trirectangle !