No	titre	3	4	5	6	7	8	9	10	Ar.	Alg.	Ge.	Lo.	Orig.
1.	Au boulot	3											x	SI
2.	Les verres d'Albert	3	4							x				RZ
3.	Marelle à trois	3	4							x		x		AO
4.	Les triangles (I)	3	4	5								x		GP
5.	Tours bicolores	3	4	5						x		x		SR
6.	Roméo et Juliette		4	5								x		BB
7.	La chambre de mon cousin		4	5						x			x	LO
8.	Sommes et produits			5	6					x				GP
9.	Drôle de numéro			5	6					x			x	SR
10.	Des oeufs trop légers			5	6	7				x			x	FC
11.	Jeu des multiples et diviseurs				6	7	8			x			x	CHX
12.	La station d'essence				6	7	8			x			x	RV
13.	Qui va lentement ...				6	7	8			x		x		AO
14.	Les triangles (II)				6	7	8	9	10			x		GP
15.	Distributeur de monnaie					7	8	9	10	x				CI
16.	La calculatrice de Pascal					7	8	9	10		x		x	SI
17.	La boîte de Nelly						8	9	10	x	x	x		SR
18.	La récolte des olives							9	10	x	x			RV
19.	Les trucs d'André							9	10	x	x			SI
20.	La nouvelle route							9	10			x		TI

1. AU BOULOT (Cat. 3)

Après avoir salué Blanche-Neige, les sept nains vont travailler en chantant. Comme d'habitude, ils marchent en file indienne, l'un derrière l'autre :

- le dernier de la file est Prof,
- Timide se trouve entre Atchoum et Dormeur,
- Joyeux est à un bout de la file,
- il y a trois nains entre Joyeux et Simplet,
- Dormeur n'est pas au milieu de la file,
- Grincheux est derrière Simplet.

Écrivez le nom de tous les nains, du premier au dernier de la file.
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALISI A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : gestion de relation d'ordre et de conditions, sériation, formulation d'hypothèses et vérifications

Analyse de la tâche

- Comprendre, de la première et de la troisième information que Joyeux est le premier de la file (parce que le dernier est Prof).
- Comprendre, de la quatrième et de la dernière information que le cinquième est Simplet et que Grincheux est le sixième.
- Déduire que Dormeur peut se trouver en deuxième ou troisième position (selon la cinquième information, il n'est pas quatrième).
- Conclure que Timide doit se trouver en troisième position (la deuxième information le place entre Dormeur et Atchoum) et que par conséquent Dormeur est le deuxième de la file, alors qu'Atchoum occupe la position centrale.
- Écrire la liste des nains du premier au dernier : Joyeux, Dormeur, Timide, Atchoum, Simplet, Grincheux, Prof.

Ou Après avoir placé les deux nains qui sont aux extrémités (J et P), procéder par essai pour les autres en contrôlant que les conditions sont vérifiées et ajuster les positions

Attribution des points

4 Réponse correcte (Joyeux, Dormeur, Timide, Atchoum, Simplet, Grincheux, Prof) avec explication qui met en évidence la manière dont toutes les informations ont été prises en compte

3 Réponse correcte, avec explications incomplètes dans lesquelles n'apparaît pas la prise en compte de toutes les conditions

ou liste des noms des nains en ordre inverse, avec explication montrant que toutes les autres conditions ont été prises en compte

2 Réponse correcte sans explication

ou une inversion

1 Deux inversions dans l'ordre

0 Autres solutions ou incompréhension du problème

Niveau : 3

Origine : Siena

2. LES VERRES D'ALBERT (Cat. 3, 4)

Albert a reçu une caisse de 42 verres de cristal qu'il va ranger dans la vitrine de sa boutique.
Il dispose tous les verres sur 7 rayons et, sur chaque rayon, il met un verre de moins que sur le rayon précédent.

Combien y a-t-il de verres sur chaque rayon ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, succession de nombres naturels

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de trouver 7 nombres naturels consécutifs dont la somme est 42.
  Procéder par essais :
  1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 non
  2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35 non
  3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 42 oui !

Ou : dessiner la répartition sur 7 rangs jusqu'à pouvoir disposer les 42 verres.

Ou : partir de 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28, soustraire 28 de 42, pour savoir combien qu'il reste 14 verres avec lesquels on peut encore former sept groupes de deux verres à ajouter sur chaque rayon.

Ou : diviser 42 par 7 pour trouver le nombre « moyen » et arriver à la solution par adaptations successives.

Attribution des points

4 Réponse correcte avec la séquence des 7 nombres (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3) ou dessin du rangement indiquant le nombre de verres par rang, avec explication de la procédure ou description des essais
ou : dessin du rangement avec indication du nombre de verres dans chaque rang et explication ou explicitation des essais

3 Réponse correcte sans explication (avec, au moins, la vérification de la somme)

2 Disposition des verres en rangs, avec une seule des conditions non respectée (il n'y a pas 7 rayons, ou il n'y a pas 42 verres, ou des écarts sont différents de 1)
ou une autre erreur de calcul

1 Solution qui ne respecte qu'une des trois contraintes

0 Incompréhension du problème ou solution ne respectant aucune des trois conditions

Niveaux : 3, 4

Origine : Rozzano

3. MARELLE À TROIS (Cat. 3, 4)

Dans la cour de l'école, les enfants ont dessiné une grande grille carrée sur laquelle ils jouent.
Un nombre est écrit dans chaque case.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Règles de déplacement dans la grille :

toujours d'une case à une case voisine en suivant les lignes ou les colonnes,

comme ceci : →, *ou* ← , *ou* ↑ , *ou* ↓ ,

mais jamais ainsi : ↗ , *ni* ↖ , *ni* ↙ , *ni* ↘

Règles du jeu :
Trois joueurs partent de trois cases différentes du bord de la grille.
Un camarade, à l'extérieur de la grille, bat sur un tambourin. À chaque coup de tambourin, les trois joueurs font chacun un pas, en même temps, selon les règles de déplacement.
Lorsque deux joueurs se rencontrent sur une même case, ils gagnent la partie et le troisième joueur est éliminé.

Trois amies, Anne, Brigitte et Claire décident de jouer une partie.
Anne part de la case 5, Brigitte de la case 6 et Claire de la case 23. En trois coups de tambourin, elles font chacune un premier pas, puis un deuxième, puis un troisième pas.
À ce moment, deux d'entre elles sont sur la même case et gagnent. La troisième est éliminée et la partie est terminée.

Qui sont les gagnantes et quelle est la fillette qui a été éliminée ?

Sur quelles cases les deux gagnantes ont-elles pu se retrouver ? Indiquez-les toutes.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : déplacements sur un quadrillage en fonction de règles données

Analyse de la tâche

- Essayer ou imaginer tous les déplacements possibles en trois coups (voir, entre autres, qu'on peut revenir sur ses pas ou tourner deux fois de suite).
- Identifier pour chaque fillette toutes les cases qu'elle peut atteindre en 3 déplacements :
  Anne : 2, 4, 8, 10, 14 et 20
  Brigitte : 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17 et 21
  Claire : 8, 12, 14, 16, 18, 20, 22 et 24
  Et retenir celles qui sont communes à 2 enfants : l'une des trois cases : 8, 14 et 20, à la même « distance » des cases de départ de Anne et Claire.

Ou : pour chaque couple de fillettes, trouver un parcours qui les fait se rencontrer par essais successifs, mais sans être certain d'avoir trouvé toutes les cases possibles.

Ou : se rendre compte que Brigitte, qui part de la case 6, aboutit sur une case impaire et qu'elle ne pourra jamais rencontrer les deux autres qui n'aboutissent que sur des cases paires.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Anne et Claire peuvent se rencontrer sur les cases 8, 14 ou 20; Brigitte est la fillette éliminée)
3 Deux cases possibles sont indiquées, avec indication du nom des gagnantes et de la fillette éliminée
2 Une seule case possible est indiquée, avec indication du nom des gagnantes et de la fillette éliminée
1 Une des cases possibles, au moins, est indiquée, avec d'autres cases incorrectes
0 Aucun parcours n'est trouvé aboutissant à une des cases possibles ou incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine: Val d'Aosta

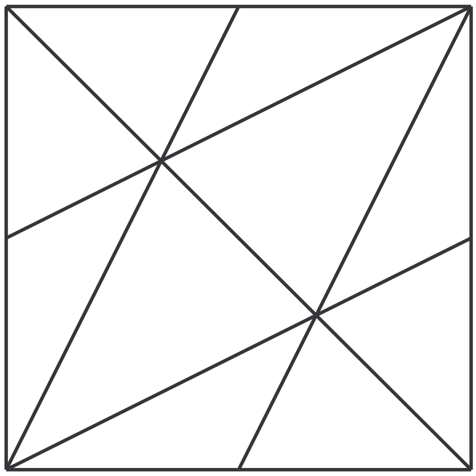
4. LES TRIANGLES (Cat. 3, 4, 5)

Dans cette figure, il y a beaucoup de triangles.

Pierre en a compté 15, mais il ne sait pas s'il les a tous trouvés.

Combien de triangles peut-on voir dans cette figure ?

Expliquez comment vous les avez comptés.



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : reconnaissance de triangles dans une figure complexe
- Logique : organisation d'un dénombrement

Analyse de la tâche

- Identifier les triangles
- Se rendre compte qu'il n'y a pas que les 10 « petits » triangles juxtaposés qui composent le carré, mais qu'il y a aussi des triangles plus grands, formés de plusieurs « petits ».
- Déterminer une démarche de comptage des triangles, par « catégories ». Par exemple on peut dénombrer les triangles en fonction du nombre de « petits » triangles qu'ils contiennent : (Voir dessins page suivante)

nombre de petits triangles contenus :	1	2	3	4	5	
triangles dénombrés	10	4	8	0	2	total : 24

Ou : choisir un segment ; compter tous les triangles qui ont ce segment pour côté. Éliminer ce segment, en choisir un autre et recommencer. Ainsi de suite… en faisant attention de ne pas choisir deux fois le même triangle.

Ou : choisir un point d'intersection de segments. Compter tous les triangles qui ont ce point pour sommet. Éliminer ce point et recommencer avec un autre point…

- Le comptage peut se faire en coloriant sur la figure reproduite en plusieurs exemplaires ou en nommant les points pour désigner les triangles. Une série de découpages sur plusieurs exemplaires de la figure est également envisageable.
- Observer une symétrie par rapport à la diagonale dessinée du carré permet de rendre le comptage plus économique.

Attribution des points

4 Réponse exacte « 24 triangles »* avec explications complètes du comptage (dessins des triangles de chaque « catégorie », descriptions et nombre de triangles par catégorie ...)

3 Réponse exacte « 24 triangles » avec explications imprécises ou incomplètes du comptage, sans répétitions et sans autres figures
ou de 20 à 23 triangles différents, sans répétitions, avec explications et sans autres figures que des triangles

2 Réponse exacte « 24 triangles » sans explications, sans répétitions ou sans autres figures que des triangles
ou réponse exacte, mais avec d'autres figures que des triangles ou avec répétitions
ou de 16 à 19 triangles différents avec explications et sans autres formes que des triangles

1 De 10 à 15 triangles corrects différents

0 Incompréhension du problème ou autres réponses

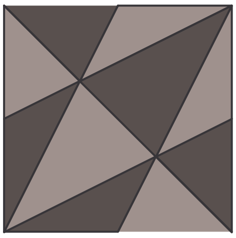
Nivaux : 3, 4, 5

Origine : *Du quotidien aux mathématiques* N. ROUCHE & all. Ellipses 2006 adapté par GP

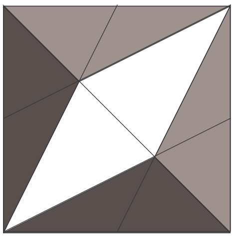
*(Voir solutions page suivante)

Les 24 triangles :

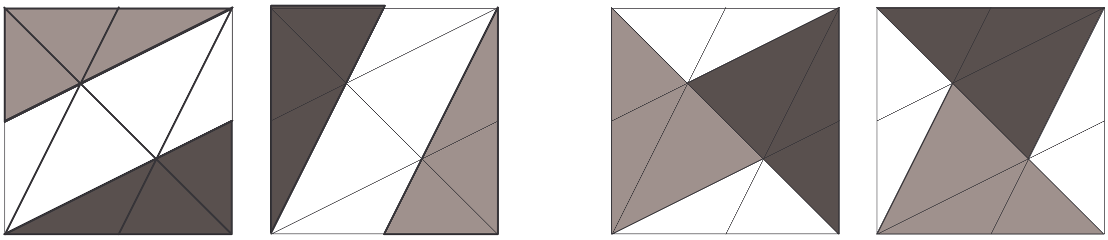
10 triangles formés de 1 petit triangle



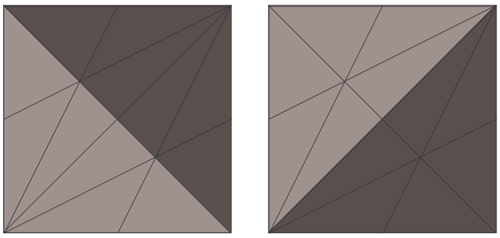
4 triangles formés de 2 petits triangles



8 (4 + 4) triangles formés de 3 petits triangles



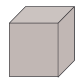
4 (2 + 2) triangles formés de 6 petits triangles



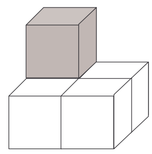
5. TOURS BICOLORES (Cat. 3, 4, 5)

Robin possède une boîte qui contient des cubes gris et des cubes blancs.
Il construit plusieurs tours en respectant le modèle suivant :

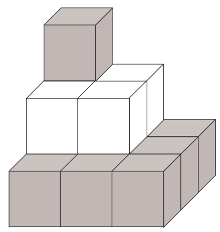
Première tour : 1 cube gris.



Deuxième tour :
5 cubes : 1 gris et 4 blancs



Troisième tour :
14 cubes : 10 gris et 4 blancs



Robin continue à construire des tours en changeant de couleur pour chaque étage.

En continuant de la même manière, combien de cubes de chaque couleur Robin utilisera-t-il pour construire la sixième tour ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication, carrés des premiers nombres naturels
- Géométrie : représentation plane d'un objet en trois dimensions

Analyse de la tâche

- Comprendre que tous les cubes ne sont pas visibles sur la représentation.
- Comprendre les règles de construction des tours : alternance des couleurs ; chaque étage a la forme d'un carré dont le côté comporte un cube de plus que celui de l'étage immédiatement supérieur (à partir du haut de la tour, les côtés des carrés sont de 1, 2, 3, ... cubes).
- Déterminer le nombre de cubes de chaque tour et leur couleur, par construction effective à l'aide de matériel et comptage un à un, ou étage par étage par addition ou multiplication (carrés) puis par addition du nombre de cubes des différents étages, ...

Ou : calculer les nombres de cubes de la 4e tour en ajoutant 16 blancs : 30 cubes (14 + 16) dont 10 gris et 20 (4 + 16) blancs ; puis de la 5e tour : 55 cubes (30 + 25) dont 35 gris (10 + 25) et 20 blancs, puis de la 6e tour : 91 cubes dont 35 gris et 56 (20 + 36) blancs (les résultats peuvent être organisés en tableaux).

Ou : remarquer que les nombres de cubes par étage sont donnés par la suite des carrés des nombres naturels et utiliser cette suite, (passage du géométrique au numérique), pour déterminer le nombre de cubes de chaque couleur : gris (1 + 9 + 25 = 35) et blancs (4 + 16 + 36 = 56).

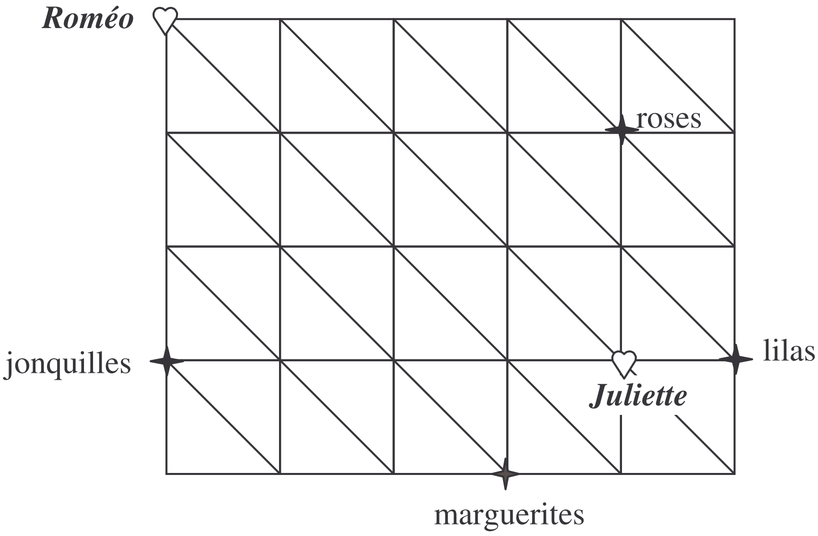
Attribution des points

4 Solution correcte (35 gris et 56 blancs) avec explications
3 Solution correcte (35 gris et 56 blancs) sans explications ou avec explications insuffisantes
2 Démarche correcte mais avec réponse fausse due à une seule erreur dans le dénombrement ou le calcul
ou démarche correcte avec, comme réponse, le nombre total de cubes (91) sans distinguer les couleurs
1 Comptage de cubes visibles uniquement (15 gris et 21 blancs)
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Suisse romande

6. ROMÉO ET JULIETTE (Cat. 4, 5)



Roméo marche en suivant les chemins dessinés sur ce plan.
Il va rejoindre Juliette, mais il veut absolument lui apporter un bouquet de fleurs.
Roméo a le choix entre : un bouquet de lilas, un bouquet de jonquilles, un bouquet de roses ou un bouquet de marguerites.

Quel bouquet de fleurs Roméo doit-il choisir pour que le chemin à parcourir soit le plus court possible ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : déplacement sur un réseau, détermination de distances, mesure et comparaison de longueurs

Analyse de la tâche

- Constater qu'il y a de nombreux parcours de Roméo à Juliette passant par l'un des bouquets.
- Se rendre compte que, pour comparer les longueurs de deux parcours, il ne suffit pas de calculer le nombre de « tronçons » du schéma mais qu'il faut distinguer les deux types de tronçons en présence qui correspondent à deux unités de mesure non équivalentes : le côté et la diagonale d'un carré du quadrillage.
- Trouver les critères de comparaison de ces deux unités : une diagonale est plus longue qu'un côté mais deux côtés sont plus longs qu'une diagonale (par estimation visuelle, par déplacements réels ou imaginés pour comparer directement les longueurs, par mesure à l'aide d'une règle graduée, par reports, ... ou par des « théorèmes adultes » du genre « le chemin le plus court d'un point à un autre est celui qui suit une ligne droite » ...).
- Trouver le parcours le plus court pour chaque fleur, en tenant compte des critères précédents.
- Comparer les quatre parcours minimaux obtenus : « chemin des jonquilles », « chemin des marguerites » ... (toujours à l'aide des critères précédents) en s'aidant éventuellement d'une disposition en tableau :

Fleurs	Nombre total de « tronçons »	Nombre de côtés	Nombre de diagonales
Jonquilles	7	7	0
Marguerites	6	3	3
Lilas	6	3	3
Roses	6	5	1

- Remarquer que parmi les trois chemins de 6 tronçons, la longueur des chemins des marguerites et des lilas sont les mêmes alors que celui des roses n'emprunte qu'une diagonale au lieu de trois pour les deux autres. En déduire que le chemin des roses est le plus court de ces trois chemins.

  Comparer finalement le chemin des roses et celui des jonquilles et constater que, lorsqu'on retire à chacun les 5 côtés de carrés, il reste deux côtés pour les jonquilles contre une diagonale pour les roses et que c'est donc le chemin des roses le plus court.

Ou : mesurer tous les parcours avec une règle et comparer les longueurs.

Ou : reporter les différentes longueurs de chaque parcours pour obtenir un segment de même longueur que le parcours total ; puis comparer directement ou indirectement les longueurs des segments obtenus.

Attribution des points

4 Solution correcte (roses) avec explications du raisonnement suivi ou détails de la comparaison des tracés

3 Solution correcte avec explications incomplètes ou peu claires

2 Solution correcte sans explications

ou pour l'un des quatre parcours on ne trouve pas le chemin le plus court (par ex. on dit que le parcours des roses est de 7 côtés, et par conséquence l'ordre des parcours est bouleversé) mais on conserve la cohérence du raisonnement

1 Début de recherche cohérente avec différenciation entre la longueur d'une diagonale et celle d'un côté de carré

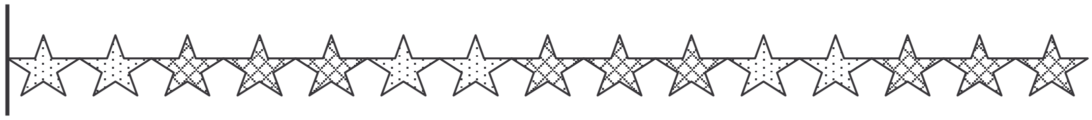
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5

Origine: Bourg-en-Bresse

7. LA CHAMBRE DE MON COUSIN (Cat. 4, 5)

Mon oncle Gino a acheté une longue bande avec des étoiles pour décorer les murs de la chambre de mon cousin Fulvio. Il est en train de coller cette bande. Il a commencé par le côté gauche d'un mur.



Fulvio regarde les étoiles déjà collées : certaines sont quadrillées, d'autres pointillées. En observant attentivement, il voit que ces dessins se répètent régulièrement. Il dit alors à son père : je peux savoir quel sera le dessin de la 2008e étoile, sans voir toute la bande.

Dites, vous aussi, quel sera le dessin de la 2008e étoile, sans dessiner toute la bande ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : suite numérique périodique, groupements par 5 et par 10, division avec reste

Analyse de la tâche

- Comprendre que la succession des dessins se répète avec régularité par groupes de 5 éléments et éventuellement, que deux groupes de 5 éléments forment un groupe de 10 étoiles.
- Trouver les liens entre la suite des étoiles et notre numération : en numérotant chaque étoile des premiers groupes (ou celles qui sont déjà dessinées, ou encore en dessinant de nouvelles étoiles à la suite), découvrir que les étoiles dont les derniers chiffres sont 1, 2, 6 et 7 sont pointillées et que celles dont les derniers chiffres sont 3, 4, 5, 8, 9 et 0 sont quadrillées, (c'est-à-dire que les étoiles des positions 11, 12, 16, 17 sont pointillées et celles des positions 13, 14, 15, 18, 19, 20 sont quadrillées, ...).

  Comprendre que cette règle s'étend aux nombres suivants, au-delà des centaines et des milliers, (qu'elle correspond aux groupements de base 10 de notre numération) ; en déduire que l'étoile numéro 2008 sera donc quadrillée puisque son rang est un nombre qui se termine par 8.

Ou : grouper les étoiles constituant le motif répétitif par 5 et effectuer la division 2008 : 5 = 401 reste 3. En conclure que la 2008ème étoile est quadrillée.

Ou : effectuer une division 2008 :10 pour obtenir 200 groupes de 10 et un reste de 8, et en déduire que l'étoile 2008 est quadrillée.

Attribution des points

4 Solution correcte (l'étoile 2008 est quadrillée) avec explications ou dessins, schémas, ... montrant clairement le lien entre les motifs et le dernier chiffres du numéro de l'étoile

3 Solution correcte avec explications incomplètes

2 Solution correcte sans aucune explication ni justification

ou réponse sur la base d'une explication satisfaisante mais avec une faute d'inattention

1 Essai de recherches non abouties (début de numérotation des étoiles ...)

0 Incompréhension du problème

Niveaux: 4, 5

Origine: Lodi

8. SOMMES ET PRODUITS (Cat. 5, 6)

Dans une classe, la maîtresse demande à ses élèves d'écrire des additions dont la somme est 25. Elle précise : « Pour ces additions, vous ne pouvez utiliser que les nombres suivants : 1, 2, 5, 10 et 20. »
Jules propose : 10 + 5 + 5 + 5 = 25.
Sophie propose : 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 10 + 5 = 25.
La maîtresse demande ensuite à chaque élève de remplacer les signes « + » par des signes « x » et de calculer les produits.
Jules obtient : 10 x 5 x 5 x 5= 1250.
Et Sophie obtient : 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 10 x 5 = 1 600.

Écrivez, vous aussi, des sommes égales à 25 en n'utilisant que les nombres 1, 2, 5, 10 et 20. Puis calculez le produit des nombres utilisés.

Quel est le plus grand produit qu'on peut obtenir en choisissant bien les nombres ?

Et quel est le plus petit produit ?

Expliquez comment vous avez trouvé ces produits.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication (associativité et élément neutre « 1 »)
- Logique et raisonnement : conjecturer, déduire

Analyse de la tâche

- Lire les exemples et faire d'autres essais pour comprendre que le produit varie même si la somme des nombres choisis est toujours 25.
- Découvrir, après de nombreux essais plus ou moins organisés quelques propriétés dont, en particulier :

  on ne peut choisir que 25 « 1 » au maximum pour les sommes, mais ces facteurs « 1 » ne modifient pas les produits (élément neutre de la multiplication) ; par conséquent, en choisissant exclusivement les « 1 », on obtiendra le plus petit produit possible : 1x1x1x.... = 1^{25} = 1 , mais il faudra éviter au maximum ces « 1 » dans la recherche du plus grand produit ;

  on ne peut choisir qu'un seul « 20 » ou deux « 10 » au maximum, ce qui limite sensiblement le nombre de facteurs et la grandeur des produits obtenus ;

  ce sont les nombres « 2 » et « 5 » qui semblent les plus « intéressants » pour la recherche du plus grand produit.
- Rechercher la répartition optimale des facteurs « 2 » et « 5 » entre les sommes et les produits par des observations du genre :

  les termes 5 = 2 + 2 + 1 d'une somme deviennent, dans les produits correspondants : 5 > 2 x 2 x 1 = 4 et il est alors préférable de choisir 5 ;

  mais les termes 5 + 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 d'une somme de 10 deviennent 5 x 5 = 25 < 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32 et il est alors préférable de choisir les nombres « 2 » ;

  ce genre d'observation peut aboutir au choix de dix « 2 » et de un « 5 » conduisant à 2^{10} x 5 = 5120 (solution optimale) alors que le choix de douze « 2 » et un « 1 » conduit à 2^{12} x 1= 4096 (solution non optimale).

Attribution des points

4 Les deux réponses exactes (5120 et 1) avec explications
3 Les deux réponses exactes sans explications
ou une réponse exacte et l'autre erronée (par exemple 4096 et 1) avec explications
2 Une réponse exacte et l'autre erronée (avec une erreur due à un choix non optimal) sans explications,
1 Aucune réponse exacte mais éléments de recherche corrects
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6
Origine : GP

9. DRÔLE DE NOMBRE (Cat. 5, 6)

Le numéro de la plaque de la voiture de Miss Math est particulier : 23651 ;

- il est formé de 5 chiffres, tous différents ;
- le troisième chiffre est le produit des deux premiers chiffres (6 = 2 x 3);
- le troisième chiffre est aussi la somme des deux derniers chiffres (6 = 5 + 1).

Miss Math se demande combien de numéros à 5 chiffres ont les mêmes caractéristiques que celui de la plaque de sa voiture.

Aidez-la à trouver la réponse au problème et notez tous les détails de votre démarche.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition (et élément neutre « 0 »), soustraction, multiplication
- Logique et raisonnement : organisation systématique d'un inventaire

Analyse de la tâche

- Considérer les trois conditions simultanées.
- Comprendre que le 0 ne sera jamais utilisé à cause de ses propriétés (il réapparaîtrait deux fois dans les trois premiers chiffres comme facteur et comme produit, ou entraînerait l'égalité du troisième chiffre et d'un des deux derniers chiffres dans l'addition).
- Comprendre que le chiffre central ne peut être ni 1 (dans l'addition on aurait 1 + 0), ni 2 (dans l'addition on aurait 1 + 1, ou 2 + 0), ni 3 (on pourrait faire l'addition, mais pas la multiplication sans répéter des chiffres), ni 4 (comme pour le 3), ni 5 et 7 (on pourrait faire l'addition, mais pas la multiplication sans répéter des chiffres, puisque comme le 3, ce sont des nombres premiers). Il ne peut pas être 9 parce que les chiffres de la multiplication peuvent être seulement 1 et 9 ou bien 3 et 3.
- Comprendre que les chiffres au centre peuvent être seulement 6 ou 8.
- Voir que les seuls produits 2 x 3 = 6, 3 x 2 = 6, 2 x 4 = 8, 4 x 2 = 8 peuvent entrer en ligne de compte pour fabriquer le début des nombres candidats, et donner ensuite naissance aux additions respectives suivantes :

  6 = 5 + 1 ; 6 = 1 + 5 ; 8 = 7 + 1 ; 8 = 1 + 7 ; 8 = 5 + 3 ; 8 = 3 + 5

  En déduire les autres 11 nombres qui satisfont aux conditions imposées, sans compter l'exemple :

  23615, 24817, 24835, 24853, 24871, 32615, 32651, 42817, 42835, 42853, 42871.

Ou : une démarche analogue est possible en partant des sommes pour aboutir aux produits.

Attribution des points

4 Détermination de tous les nombres (donc 11 réponses ou 12 réponses selon que l'exemple est inclus ou non), avec explication générale de la démarche pour un nombre au moins

3 9 ou 10 nombres trouvés (sans compter l'exemple), avec explication ou les 11 nombres nouveaux sans explication

2 7 ou 8 nouveaux nombres trouvés, avec explication

1 Le début de la démarche est correct, avec au moins 3 nombres corrects

0 1 ou 2 exemples corrects ou incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Suisse romande

10. DES ŒUFS EN CHOCOLAT TROP LÉGERS (Cat. 5, 6, 7)

Monsieur Michel, propriétaire d'une fabrique de chocolat, s'aperçoit qu'une de ses 12 machines qui produisent des œufs en chocolat est mal réglée.
Les œufs qui sortent de cette machine ne pèsent que 24 grammes chacun alors que toutes les autres machines produisent des œufs de 25 grammes.
Monsieur Michel, qui aime beaucoup les devinettes, demande à son épouse de découvrir quelle est la machine mal réglée, mais en une seule pesée.
Madame Michel, très futée, numérote les machines de 1 à 12 et met sur la balance : 1 œuf fabriqué par la machine n° 1, 2 œufs de la machine n° 2, 3 œufs de la machine n° 3 et ainsi de suite jusqu'à 12 œufs de la machine n°12.
Ces œufs pèsent ensemble 1 942 grammes et Madame Michel peut savoir, avec cette unique pesée, quelle est la machine mal réglée.

Selon vous, quelle machine est mal réglée ?

Expliquez le raisonnement qui vous a permis de trouver la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication, ...
- Logique et raisonnement : déductions

Analyse de la tâche

- Faire une hypothèse sur le numéro de la machine qui est mal réglée ; calculer le poids de l'ensemble des œufs pesés dans ce cas ; le comparer à 1 942 grammes. Si les deux poids sont les mêmes, valider l'hypothèse. Sinon, formuler une autre hypothèse cohérente avec le résultat obtenu (augmenter le numéro de la machine si le poids obtenu est supérieur à 1 942, le diminuer sinon).

Ou : se rendre compte que la différence entre le poids total trouvé (1942) et le poids total des œufs si tous étaient bien calibrés (c'est-à-dire le nombre de grammes qui manquent) correspond au nombre d'oeufs qui ont un gramme de moins et, au vu du mode d'échantillonnage choisi par Madame Michel, au numéro de la machine qui les a fabriqués.

Trouver alors le nombre d'oeufs pesés 1 + 2 + ... + 12 = 78 (à la main, à la calculatrice, ou par associativité et multiplication (12 + 1) x 12/ 2 = 78) et calculer que ces 78 œufs devraient peser 78 x 25 = 1950 g. (On peut aussi directement faire la somme de 25 x 1 + 25 x 2 + 25 x 3… et trouver un poids total de1950 g)

Constater qu'il manque 1950 - 1942 = 8 g ; en déduire que 8 œufs pèsent 1 g de moins que prévu et qu'ils proviennent de la machine n° 8, puisqu'il n'y en a qu'une de mal réglée.

Ou : diviser le poids total par le nombre d'oeufs (1942 : 78 donne 24 reste 70); constater qu'il manque 8 grammes pour que chaque oeuf soit de 25 grammes et déduire que la machine défectueuse est la machine no 8.

Ou : procéder par essais en excluant à chaque fois les oeufs d'une machine, supposée défectueuse) et en calculant le poids des oeufs (supposés de 25 grammes) de toutes les autres, pour vérifier si le poids total est un multiple de 25 :
1942 – (1 x 24) = 1918 ; 1942 – (2 x 24) = 1884 ; ... ; 1942 – (8 x 24) = 1750 !! ....

Attribution des points

4 Réponse correcte (machine n° 8) avec explications claires
3 Réponse correcte, avec explications incomplètes
2 Réponse correcte sans aucune explication
ou réponse erronée (erreur de calcul) avec explications
1 Début de recherche cohérente
0 Incompréhension du problème

Niveau : 5, 6, 7

Origine : Franche-Comté

11. JEU DES MULTIPLES ET DIVISEURS (Cat. 6, 7, 8)

Deux joueurs A et B jouent sur une grille de 40 cases numérotées de 1 à 40 :

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40

Le joueur A commence : il barre un nombre de son choix dans la grille.
Puis, le joueur B barre un autre nombre : ce nombre doit être un multiple ou un diviseur du nombre barré par le joueur A.
Puis chaque joueur, à tour de rôle, barre un nombre qui doit être multiple ou diviseur du dernier nombre barré.
Le jeu s'arrête quand un des deux joueurs ne peut plus barrer de nombre. Ce joueur perd la partie.
<u>Exemple :</u>
Voici les nombres qui ont été barrés par les deux joueurs au cours d'une partie :

Joueur A : 4 9 12 2 5 1

Joueur B : 36 3 24 10 15 37

Le joueur A ne peut plus jouer car il n'y a pas de multiples de 37 dans la grille et que les deux seuls diviseurs de 37 (« 1 » et « 37 ») sont déjà barrés. C'est le joueur B qui gagne.

Julie, qui est très forte à ce jeu, sait que lorsqu'elle joue la première elle peut gagner à coup sûr et rapidement, en quelques coups.
Il lui suffit de bien choisir le premier nombre qu'elle barre.

Quel peut être ce nombre ? Trouvez toutes les possibilités.

Expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiples et diviseurs, nombres premiers
- Logique et raisonnement : conjecturer et déduire

Analyse de la tâche

- Jouer quelques parties pour repérer les contraintes du jeu. Savoir ce qu'est un diviseur et un multiple, comprendre qu'on n'est pas obligé d'alterner multiples et diviseurs mais qu'on peut passer par plusieurs multiples ou diviseurs successifs, repérer les nombres qui ont beaucoup de diviseurs et de multiples et ceux qui en ont peu.
- Comprendre que dès qu'on a pu choisir un nombre n'ayant plus de diviseurs ou de multiples libres, on gagne immédiatement.
- Par conséquent il faut éviter de laisser à l'adversaire la possibilité de choisir un nombre dont tous les multiples et diviseurs ont déjà été barrés. Dans l'exemple donné le joueur A a mal joué l'avant-dernier coup en choisissant « 1 » car depuis là, le joueur B pouvait prendre le « 37 » qui termine le parcours.
- Lorsqu'on a compris que le « 1 » est à éviter pour soi, car il conduit à une impasse comme le « 37 », il faut tenter de forcer son adversaire à biffer ce « 1 ». Il faut alors remarquer que le joueur qui commence par l'un des quatre nombres 23, 29, 31 ou 37 qui n'ont pas de multiples dans la table de 1 à 40 et qui n'ont que 1 comme diviseur) contraint son adversaire à biffer «1 » à son premier coup et permet au premier joueur de revenir sur l'un des trois autres nombres, qui n'aura plus alors ni multiple ni diviseur libre.

Remarque : les quatre nombres : 23 ; 29 ; 31 ; 37 sont premiers et supérieurs à 20. En choisissant un nombre premier inférieur à 20, on laisse la possibilité à l'adversaire de biffer un de ses multiples et de gagner par une succession de coups obligés.

Par exemple :

Premier joueur : 19 2 13 3 11 1

Deuxième joueur : 38 26 39 33 22

Attribution des points

4 Les quatre nombres (23, 29, 31, 37), avec explications

3 Les quatre nombres (23, 29, 31, 37), sans explications
ou trois de ces nombres avec explications
ou les quatre nombres (23, 29, 31, 37), accompagnés d'un ou deux autres nombres

2 Deux des nombres corrects seulement, avec explications
ou trois nombres, mais soit sans justification, soit accompagnés d'autres nombres premiers inférieurs à 20

1 Un nombre correct avec explications
ou deux nombres, soit sans explication, soit accompagnés d'autres nombres premiers inférieurs à 20
ou trois ou quatre nombres corrects, mais accompagnés d'autres nombres parmi lesquels des nombres non premiers

0 Incompréhension du problème

Niveau : 6, 7, 8

Origine : Activité « ludique » classique du domaine des diviseurs et multiples, « redécouvert » récemment par l'école de « Juniper Green » (environs d'Edinbourg, en Écosse) proposé par Châteauroux

12. LA STATION D'ESSENCE (Cat. 6, 7, 8)

En passant devant une station d'essence, Claude lit le prix du litre d'essence.

Ce prix est affiché par six panneaux alignés : quatre de ces panneaux sont mobiles et affichent chacun un chiffre (1, 2, 5 et 7), un panneau fixe affiche la virgule « , » (en gris) et un autre la monnaie « € » (aussi en gris) :

1	,	2	5	7	€

Claude voit que le pompiste est en train d'afficher le nouveau prix en apportant un nouveau panneau mobile avec un « 8 ».

Il se souvient alors que hier soir, la radio annonçait que le prix de l'essence allait augmenter aujourd'hui et que, pour faire un plein de 40 litres, il faudra dépenser entre 1 € et 1,30 € de plus.

Quel pourrait être le nouveau prix affiché pour un litre d'essence ?

Indiquez toutes les possibilités et donnez les détails de votre recherche.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Combinatoire
- Arithmétique : chiffres et nombres, opérations

Analyse de la tâche

- Comprendre que si le pompiste a en main un panneau « 8 » les nouveaux prix possibles doivent respecter les conditions suivantes :
  - Quand on substitue un panneau par un nouveau, l'ancien peut encore être utilisé pour former un nouveau prix ;
  - Le « 1 » ne peut être remplacé par le nouveau panneau « 8 » ni par un des anciens « 2 », « 5 » ou « 7 » car l'augmentation serait beaucoup plus importante que ce qui a été annoncé ;
  - Le « 2 » ne peut pas non plus être remplacé par « 8 », « 5 » ou « 7 » car l'augmentation serait supérieure à 30 centimes par litres ou 12 € pour 40 litres.
  - Donc le « 8 » ne peut remplacer que le « 5 » ou le « 7 » et il faut envisager les arrangements sans répétitions de ces trois panneaux pris deux à deux pour les deuxième et troisième chiffres après la virgule.

  On peut établir, par exemple un tableau du genre :

Nouveau prix	Ancien prix	Différence / litre	pour 40 litres
1,258	1,257	0,001	0,001 x 40 = 0,04
1,285	1,257	0,028	0,028 x 40 = 1,12
1,278	1,257	0,021	0,021 x 40 = 0,84
1,287	1,257	0,03	0,03 x 40 = 1,2

Ou : établir un tableau analogue mais partant des prix totaux : calculer le coût de 40 litres à l'ancien prix (1,257 x 40 = 50,28) y ajouter la fourchette d'augmentation (de 51,28 à 51,58) et calculer le nouveau prix du litre qui se situera entre 51,28 :40 = 1,282 et 51,58 : 40 = 1,289. En conclure que le prix pourrait être, avec les chiffres à disposition et selon les informations de la radio 1,287 ou 1,285 €.

Ou : calculer la fourchette d'augmentation par litre : entre 1 € : 40 = 0,025 € et 1,30 € : 40 = 0, 0325 €. Le nouveau prix du litre se situera donc entre 1,285 € et 1,2895 €. Les deux seules possibilités en ne retirant qu'un chiffre pour le remplacer par 8 sont 1,285 € et 1,287 €.

Attribution des points

4 Les deux solutions (1,287 et 1,285) avec explications claires et détaillées montrant qu'il n'y en a pas d'autres

3 Les deux solutions avec explications incomplètes ou avec un tableau qui ne mentionne pas pourquoi les autres positions du « 8 » sont exclues

2 Une des deux solutions avec explication claires et/ou ou exclusion d'une de deux solutions à cause d'une erreur de calcul

1 Début de recherche cohérente ou une seule solution sans explication

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Riva del Garda

13. QUI VA LENTEMENT ... (Cat. 6, 7, 8)

Matthieu est un automobiliste qui conduit très régulièrement. Il part aujourd'hui en vacances. Il passe par Issy, traverse Labat, puis Pluloin pour arriver à sa destination Bellemer. Sa grand-mère le rejoindra dans quelques jours.

Après son arrivée Matthieu téléphone à la vieille dame pour l'informer sur ses temps de passage :

- Je suis passé à Issy à 8h du matin, à Labat à 8h45 et à Pluloin à 9h30. J'étais à Bellemer à 10h30. Je n'ai commis aucune imprudence et j'ai roulé à la même vitesse sur tout le parcours.

Lorsque la grand-mère fait le même parcours, elle passe à Issy à 9h10 mais n'arrive à Labat qu'à 10h10. Elle se rend alors compte qu'elle va mettre plus de temps que Matthieu mais, vu qu'elle est extrêmement prudente, elle décide de ne pas accélérer et de continuer en maintenant la même vitesse.

À quelle heure la grand-mère passe-t-elle à Pluloin et à quelle heure arrive-t-elle à Bellemer ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication, division, proportionnalité
- Mesure de durées

Analyse de la tâche

- Comprendre que la grand-mère a accumulé un retard de 15 minutes par rapport au temps prévu entre Issy et Labat (1h au lieu de 45 minutes)
- Considérer que 45 minutes représentent trois quarts d'heure et en déduire qu'elle accumule un retard de 5 minutes chaque 15 minutes.
- Déterminer le temps mis par Matthieu pour les étapes suivantes (45 minutes de Labat à Pluloin et 60 minutes de Pluloin à Bellemer)
- Les retards correspondants seront respectivement de 15 = 45 :15 x 5) minutes et de 20 = 60 : 15 x 5 minutes.
- Ajouter les retards aux temps précédents pour trouver les heures demandées : 11h10 et 12h30

Ou organiser les données dans un tableau et utiliser l'égalité des écarts entre 8h et 8h45 d'une part et 8h45 et 9h30 d'autre part pour en déduire que Grand-mère met le même temps pour aller de Issy à Labat que de Labat à Pluloin. comme l'écart entre 9h30 et 10h30 (60 minutes) est 4/3 de l'écart entre 8h45 et 9h30 (45 minutes), on peut utiliser la même relation pour calculer le temps que mettra la grand-mère pour aller de Pluloin à Bellemer : 4/3 de 60 minutes, c'est-à-dire 80 minutes.

	Issy		Labat		Pluloin		Bellemer
Matthieu	8h	+ 45 min	8h45	+45 min	9h30	+60 min	10h30
Grand-mère	9h10	+60 min	10h10	+60 min	11h10	+80 min	12h30

Attribution des points

4 Réponse correcte (passe à 11h10 à Pluloin et arrive à Bellemer à 12h30) avec explications claires

3 Réponse correcte mais avec explications incomplètes

2 Réponse correcte sans explication
ou procédure correcte mais avec une erreur de calcul

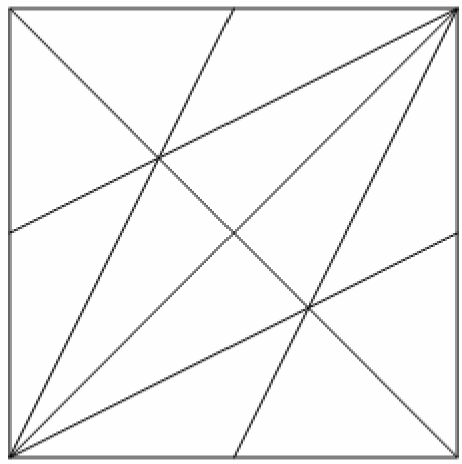
1 Début de raisonnement cohérent ou réponse correcte pour Pluloin seulement (11h10)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Val d'Aosta

14. LES TRIANGLES (II) (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)



Dans cette figure, il y a beaucoup de triangles.

Pierre en a compté 32, mais il ne sait pas s'il les a tous trouvés.

Combien de triangles peut-on voir dans cette figure ?

Expliquez comment vous les avez comptés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : reconnaissance de triangles dans une figure complexe
- Logique : organisation d'un dénombrement

Analyse de la tâche

- Identifier les triangles
- Se rendre compte qu'il n'y a pas que les 12 « petits » triangles juxtaposés qui composent le carré, mais qu'il y a aussi des triangles plus grands, formés de plusieurs « petits ». (Voir dessins page suivante)
- Déterminer une démarche de comptage des triangles, par « catégories ». Par exemple on peut dénombrer les triangles en fonction du nombre de « petits » triangles qu'ils contiennent :

nombre de petits triangles contenus :	1	2	3	4	5	6	
triangles dénombrés	12	8	12	4	0	4	total : 40

Ou : choisir un segment ; compter tous les triangles qui ont ce segment pour côté. Éliminer ce segment, en choisir un autre et recommencer. Ainsi de suite… en faisant attention de ne pas choisir deux fois le même triangle.

Ou: choisir un point d'intersection de deux segments compter tous les triangles qui ont ce point pour sommet; éliminer ce point et recommencer avec un autre ...

- Le comptage peut se faire en coloriant sur la figure reproduite en plusieurs exemplaires ou en nommant les points pour désigner les triangles.
- Observer une symétrie par rapport à la diagonale dessinée du carré, ce qui permet de rendre le comptage plus économique.

Attribution des points

4 Réponse exacte « 40 triangles* » avec explications complètes du comptage (dessins des triangles de chaque « catégorie », descriptions et nombre de triangles par catégorie, etc.).

3 Réponse exacte « 40 triangles » avec explications imprécises ou incomplètes du comptage, sans répétitions et sans autres figures
ou de 35 à 39 triangles sans répétitions avec explications sans autres figures que des triangles

2 Réponse exacte « 40 triangles » sans explications sans doublons et sans autres figures que des triangles
ou réponse exacte « 40 triangles » mais accompagnées d'autres figures que des triangles
ou de 30 à 34 triangles différents avec explications et sans autres figures que des triangles

1 De 20 à 29 triangles différents

0 Incompréhension du problème ou autres réponses

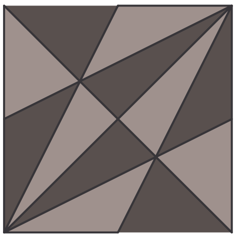
Nivaux : 6, 7, 8, 9, 10

Origine : *Du quotidien aux mathématiques* N. ROUCHE & all. Ellipses 2006, adapté par CP

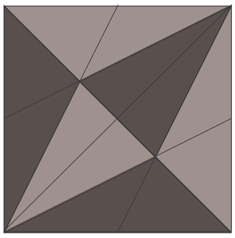
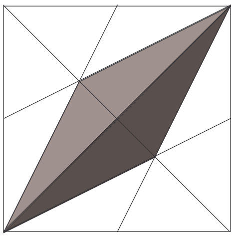
* voir solutions page suivante

Les 40 triangles

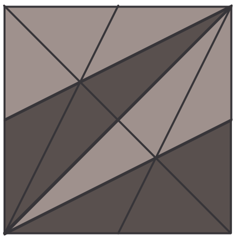
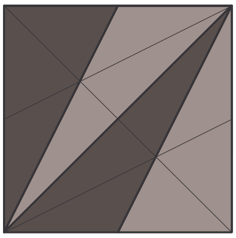
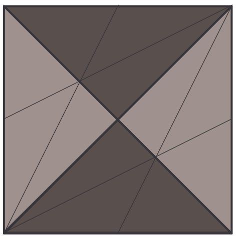
12 triangles formés de 1 petit triangle



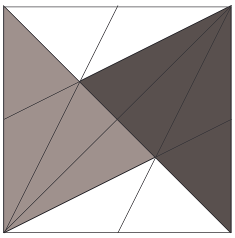
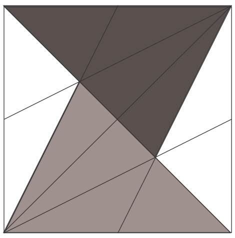
8 (6 + 2) triangles formés de 2 petits triangles

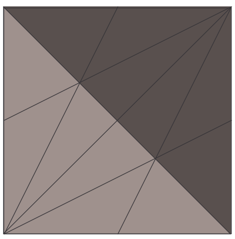
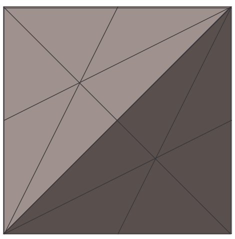
12 (4+4+4) triangles formés de 3 petits triangles

4 (2+ 2) triangles formés de 4 petits triangles

4 (2 + 2) triangles formés de 6 petits triangles

15. DISTRIBUTEUR DE MONNAIE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Dans un supermarché de Transalpie, un distributeur de monnaie change les billets en pièces de monnaie du pays, qui sont de six types différents : 0,10 FT ; 0,20 FT ; 0,50 FT ; 1 FT ; 2 FT et 5 FT (Le « FT » est le franc de Transalpie).

Ce distributeur particulier ne donne pour chaque billet que des pièces dont le produit des valeurs vaut 1.

Par exemple :

Avec un billet de 10 FT on peut recevoir 4 pièces de 0,50 FT et 4 pièces de 2 FT

car 0,5 x 0,5 x 0,5 x 0,5 x 2 x 2 x 2 x 2 = 1

ou 2 pièces de 0,50 FT, 2 pièces de 2 FT et 5 pièces de 1 FT ;

ou ...

Graziella et Gianna ont mis chacune un billet de 20 FT et Graziella a reçu 4 pièces de moins que Gianna.

Combien de pièces Graziella a-t-elle reçues, et lesquelles ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : décomposition de 1 en produit de nombres décimaux

Analyse de la tâche

- Vérifier les exemples donnés
- Comprendre qu'il s'agit de trouver comment 1 peut se décomposer en nombres décimaux proposés et identifier les trois décompositions en facteurs : 1 = 5 x 2 x 0,1 = 5 x 0,2 = 2 x 0,5 et trouver les trois sommes correspondantes : 5 + 2 + 0,1 = 7,1 ; 5 + 0,2 = 5, 2 et 2 + 0,5 = 2,5.
- Cherchez les décompositions additives de 20 avec des termes 2,5 ; 5,2 ; 7,1 et 1 Se rendre compte que l'unique décomposition additive de 20 qui fait intervenir les termes 5,2 et 7,1 est : 20 = 2,5 + 5,2 + 5,2 + 7,1 (avec 9 pièces en tout). Comprendre alors que toutes les autres décompositions additives de 20 ne contiennent que les termes 2,5 et/ou 1,
- Dresser l'inventaire des décompositions de 20 des pièces de 0,5, 1 et/ou 2, dont le produit est 1.

pièces de (en FT)	0,5	1	2	produit	somme	nb. total de pièces
	0	20	0	1	20	20
	1	imp	1	1	2,5 + ??	
	2	15	2	1	20	19
	3	imp	3	1	7,5 + ??	
	4	10	4	1	20	18
	6	5	6	1	20	17
	8	0	8	1	20	16

En confrontant toutes les décompositions de 20 FT, se rendre compte que les deux seules qui diffèrent de 4 pièces sont celles qui utilisent 20 et celle qui en utilise 16. Graziella a donc reçu 16 pièces : 8 de 0,5 FT et 8 de 1 FT.

Ou procéder par essais pour voir que les seuls couples possibles sont les pièces de 0,5 FT et 2 FT à compléter par des pièces de FT 1

Attribution des points

4 Solution exacte (Graziella reçoit 16 pièces : 8 de 0,5 FT et 8 de 1 FT) et explications (inventaire détaillé de toutes les décompositions possible) qui montre bien l'unicité de la solution

3 Solution exacte, avec explications partielles (manque l'unicité)

2 Solution exacte sans explication, (trouvée seulement pas essais)

1 Recherche faisant état de la compréhension du produit 1

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8. 9, 10

Origine : CI

16. LA CALCULATRICE DE PASCAL (Cat. 7, 8, 9, 10)

Pascal a une calculatrice qui possède deux touches spéciales :

- une touche U qui donne le quotient entier du nombre affiché par une division par 10 (sans le reste) :
  (par exemple, si l'on voit 859 sur l'écran et que l'on presse la touche U, on obtient 85 ; de même, si l'on voit 7, la touche U donne 0 ; si l'on voit 24,35, la touche U donne 2 ; ...) :
- une touche R qui double le nombre affiché ;
  (par exemple, si l'on voit 125 sur l'écran et que l'on presse la touche R, on obtient 250 ; ...).

Aujourd'hui, Pascal a fait afficher sur l'écran de sa calculatrice un nombre entier positif de deux chiffres, divisible par 7. Il n'a ensuite utilisé que ses touches spéciales, trois fois en tout. C'est le nombre 24 qui est alors apparu sur l'écran.

Quel est le nombre que Pascal avait affiché sur sa calculatrice ?

Indiquez ce nombre et l'ordre dans lequel Pascal a pu presser ses touches spéciales pour obtenir 24.

Justifiez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : chiffre, nombre et notation positionnelle ; idée de composition d'opérateurs
- Logique : combinatoire (arrangements avec répétition); raisonnement hypothético-déductif

Analyse de la tâche

Remarquer d'abord que le nombre écrit par Pascal, de deux chiffres et multiple de 7, est l'un des suivants :

14 21 28 35 42 49 56 63 70 77 84 91 98

- Considérer ensuite successivement les deux possibilités pour la première touche pressée : U ou R

a) La touche U appliquée à chacun des nombres de la suite qui précède donnerait :

1 2 2 3 4 4 5 6 7 7 8 9 9

Pour atteindre 24, il faut appuyer deux fois sur R, c'est-à-dire multiplier par 4. Seul le 6 le permet.

D'où une première solution : Pascal est parti de 63 et a fait U-R-R.

b) La touche R donne d'abord les multiples de 14 suivants :

28 42 56 70 84 98 112 126 140 154 168 182 196

Pour atteindre 24 il faudra utiliser la touche U (puisque tous ces nombres sont plus grands que 24), mais une seule fois (car tous les nombres deviendraient 0 ou 1 si on l'utilisait deux fois).

Avec U suivi de R, seul 126 donne 12 puis 24. D'où une deuxième solution : Pascal est parti de 63 et a fait R-U-R.

Avec R suivi de U, pour atteindre 24, il faudrait que R donne un nombre entre 240 et 249, ce qui n'est pas possible à partir des nombres de la liste précédente (112 donnerait 224 et 126 donnerait 252). La combinaison R-R-U ne peut pas donner 24.

Ou : Comprendre que, puisque les touches R et U, sont utilisées 3 fois, l'ordre dans lequel elles peuvent se succéder est l'une des huit séquences suivantes: RRR – RRU – RUR – URR – RUU – URU – UUR – UUU.

Parmi les multiples de 7 de deux chiffres (voir liste ci-dessus), chercher ceux qui permettent d'arriver à 24 selon l'une des huit séquences précédentes :

- La séquence RRR (qui revient à multiplier par 8) ne convient pas (le 3 n'est pas dans la liste).
- Aucune séquence où la touche U apparaît 2 ou 3 fois ne peut être prise en compte, car le plus grand nombre possible avec une touche R est 196 et 2 touches U donnent 1 au plus. Il ne reste que les séquences RRU, RUR, URR. à examiner.
- RRU (multiplier par 4 et retirer le chiffre des unités) permet de s'approcher de 24, mais sans l'atteindre : 56 x 4 = 224 –> 22 ou 63 x 4= 252 –> 25.
- RUR ne fonctionne qu'avec 63 : 63 x 2 = 126 –> 12 –> 2 x 12 = 24.
- URR, fonctionne aussi avec 63 : 63 –> 6 –> 6 x 2 x 2 = 24.

Ou: partir de 24, remonter au nombre de départ en inversant les opérations, par une recherche analogue:

RRR ne convient pas car il faudrait partir de 3 et multiplier par 8, non multiple de 7.

Comme précédemment on élimine les séquences avec deux ou trois touches U et il reste RRU, RUR et URR.

RRU ne convient pas : de 24, il faudrait passer par 240, 244, 248 (les seuls divisibles par 4) pour arriver à 60, 61 ou 62, non multiples de 7.

RUR, convient : de 24, on passe à 12 puis à 120, 122, 124, 126 ou 128 puis à 60, 61, 62, 63, 64 dont l'un, 63 est multiple de 7.

URR convient : de 24 on passe à 6 puis à un nombre compris entre 60 et 69 multiple de 7, c'est-à-dire 63.

- Conclure que le nombre écrit par Pascal est 63 et que celui-ci peut avoir obtenu 24 de deux manières, en utilisant les séquences de touches spéciales RUR ou URR.

Attribution des points

4 Solution correcte et complète (63, deux possibilités : RUR ou URR) avec justifications complètes

3 Solution correcte et complète, avec explications incomplètes ou qui ne montrent pas l'exhaustivité de la recherche
ou : le nombre 63 est trouvé mais avec une seule séquence de touches et les explications correspondantes

2 Le nombre 63 est trouvé mais avec une seule séquence de touches et sans explications claires

1 Début de raisonnement cohérent

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Siena

17. LA BOÎTE DE NELLY (Cat. 8, 9)

Nelly a une boîte en forme de parallélépipède rectangle dont les trois dimensions intérieures sont des nombres entiers de centimètres. Elle peut y placer une aiguille à tricoter de 15 cm de longueur exactement, sur la grande diagonale, avec une extrémité en un sommet inférieur et l'autre extrémité au sommet supérieur opposé.

Quelles peuvent être les dimensions de la boîte de Nelly ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique: opérations dans N sommes de carrés et racine carrée
- Géométrie : parallélépipède rectangle et théorème de Pythagore

Analyse de la tâche

- Dessiner une représentation plane du parallélépipède (ou s'appuyer sur une représentation mentale, ou travailler sur un modèle à trois dimensions).
- Reconnaître des triangles rectangles qui permettent de calculer la longueur de la grande diagonale et pour cela, faire apparaître la diagonale d'une face et une arête.
- Utiliser la relation entre la longueur d'une grande diagonale et les longueurs des trois arêtes par l'application du théorème de Pythagore, répétée deux fois de suite (une première fois pour obtenir la diagonale d'une face du PR, $d^2 = a^2 + b^2$ ou plutôt $d = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ et la seconde pour obtenir la grande diagonale qui relie deux sommets opposés du PR), pour aboutir à une relation du type $15^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$
- Autre manière de faire : utiliser directement l'application de la relation dans le PR, donnée par la formule précédente, avec a, b, c, d entiers ;
- Rechercher toutes les manières de décomposer $225 = 15^2$ en sommes de trois carrés de nombres entiers. Utiliser une procédure méthodique, par exemple celle qui consiste à considérer successivement tous les carrés de 14, 13, 12, ... , 9 comme premier des trois termes (8^2 ne peut être le plus grand car $3 \times 64 = 192 < 225$), calculer la différence à 225 (ce qui donne la liste 29, 56, 81, 104, 125, 144) et vérifier si cette différence est elle-même une somme de deux carrés.

  On arrive ainsi à $225 = 196 + 29 = 196 + 25 + 4$ solution 14, 5 et 2

  $225 = 121 + 104 = 121 + 100 + 4$ solution 11, 10 et 2

  $225 = 100 + 125 = 100 + 100 + 25$; solution 10, 10 et 5

Attribution des points

4 Les 3 solutions (14, 5, 2 ; 11, 10, 2 ; 10, 10, 5) avec explications

3 Les 3 solutions sans explications ou 2 solutions avec explications

2 Deux solutions sans explications ou une solution avec explications (une relation du type $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ a été établie)

1 Tentative et organisation de la recherche, mais la relation permettant de résoudre le problème n'est pas totalement établie

0 Incompréhension du problème

Niveau: 8, 9, 10

Origine : Suisse romande

18. LA RÉCOLTE DES OLIVES (Cat. 9, 10)

Dans le parc de l'école professionnelle de Riva, il y a une grande oliveraie, cultivée par les élèves des classes A et B. Le temps de la récolte est désormais arrivé.

Lundi matin, la classe A, de 12 élèves a commencé le travail et a récolté 1/6 de toutes les olives en 4 heures exactement.

Mardi, pendant la même durée la classe B a récolté 1/4 de toutes les olives.

Chaque élève, de chacune des deux classes, a récolté la même quantité d'olives.

Mercredi, l'enseignant, qui a entendu dire que le mauvais temps allait arriver, demande aux élèves des deux classes de terminer la récolte ensemble, en travaillant au même rythme que les jours précédents.

Combien y a-t-il d'élèves dans la classe B ?

Combien de temps faudra-t-il aux élèves, tous ensemble, pour terminer la récolte le mercredi ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos solutions.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : fractions, proportionnalité
- Algèbre : équations du premier degré

Analyse de la tâche

- Pour la première question, il faut mettre en relation les parties récoltées : 1/6 et 1/4 avec les nombres d'élèves : 12 et le nombre inconnu d'élèves de la classe B ; puis se rendre compte qu'on est en présence de grandeurs proportionnelles, vu que chaque élève récolte la même quantité d'olives pendant les 4 heures. (par des réflexions du genre : « plus on est nombreux, plus la partie récoltée est grande » ou « si on double le nombre d'élèves, la partie récoltée double »,....).
- Effectuer les calculs correspondants en utilisant l'une ou l'autre des propriétés de la proportionnalité, par exemple : après avoir transformé 1/6 et 1/4 en fractions de mêmes dénominateurs 2/12 et 3/12, voir que les parties d'oliveraie récoltées passent de 2 à 3 par une multiplication par 3/2 et que le nombre d'élèves de la classe B est 3/2 x 12 = 18 ; ou effectuer le calcul de la « quatrième proportionnelle » : 12 : 1/6 = n : 1/4. D'où n = 18.
- Pour répondre à la seconde question il y a plusieurs procédures utilisant les fractions ou une équation :
- Avec les fractions, on peut partir du calcul 1/4 +1/6 = 5/12, et considérer qu'il reste alors 7/12 de l'oliveraie à cueillir pour le mercredi. Si les deux classes ensemble ont récolté 5/12 en 4 heures (240 minutes), pour terminer il leur faudrait 240 x 7/5 = 336 minutes, ce qui fait 5 heures et 36 minutes.
- Avec une équation, si on désigne par x le temps nécessaire à l'ensemble des deux classes A et B pour récolter toutes les olives, on peut écrire : $(1/4 + 1/6)\ x = 4$, car les élèves ont mis ensemble 4 heures pour récolter 1/4 + 1/6 de la totalité de l'oliveraie. Cela donne $x = 4 \times 12/5 = 48/5$ d'heure, ce qui fait 9 h et 36 minutes. En retirant les 4 heures déjà effectuées, on trouve qu'il reste 5 heures et 36 minutes pour terminer la récolte le mercredi. Les élèves auront donc fini leur cueillette à 13 h 36.

Ou: après avoir observé que les 30 élèves des deux classes récoltent en 4 heures 1/6 + 1/4 = 5/12 des olives, poser la proportion $5/12 : 4 = 7/12 : x$, où x indique le temps nécessaire pour récolter toutes les olives, exprimé en heures, pour obtenir $x = 28/5$ ce qui représente 5h et 36min.

Attribution des points

4 Réponses correctes aux 2 questions (18 élèves ; 5h 36 min) avec explications claires et détaillées

3 Réponses correctes aux 2 questions sans explication

2 Réponse correcte à une question avec explications claires et détaillées

1 Réponse correcte à une question sans explication
ou réponse 11 h 12 min due à l'erreur considérant 8 h de travail au lieu de 4h des deux premiers jours

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Riva del Garda

19. LES TRUCS D'ANDRÉ (Cat. 9, 10)

André s'amuse à inventer des trucs pour deviner des nombres pensés par d'autres personnes. Un jour il propose à son grand-père:

- *Papi, pense à un nombre de deux chiffres !*
- *Échange les deux chiffres du « nombre pensé » (P) pour former un deuxième nombre « retourné » (R).*
- *Donne moi la somme de ces deux nombres (P+R) et la différence de ces deux nombres (P-R) et je trouverai de tête le nombre auquel tu as pensé !*

Bravo, lui répond son grand-père.

J'ai compris ton truc, mais es-tu certain qu'il marche pour tous les nombres de deux chiffres ?

Avez-vous compris le truc inventé par André et êtes-vous sûrs qu'il marche pour tous les nombres entiers de deux chiffres ?

Marcherait-il aussi pour les nombres d'un chiffre si on les écrivait avec un « 0 » devant comme 01, 02, 03 ... ?

Expliquez le truc et dites pourquoi il marche ou ne marche pas.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique: numération décimale de position, écriture polynomiale des nombres écrits en base 10
- Algèbre: systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues

Analyse de la tâche

- Écrire les deux nombre sous forme polynomiale. Le nombre pensé "*du*" (avec d dizaines et u unités) devient P = $10d+u$ et le nombre retourné "*ud*" devient $R=10u+d$.
- Se rendre compte par des essais ou par calcul algébrique, que la somme P + R = $11(u + d)$ est un multiple de 11 et que la différence P - R = $9(d – u)$ est un multiple de 9, par des essais ou par calcul algébrique, la différence pouvant être positive ou négative.

Par essais	P	R	P + R	P - R
	25	52	77 = **7** x 11	-27 = **-3** x 9
	83	38	121 = **11** x 11	45 = **5** x 9

Par algèbre : $(10d+u)+(10u+d) = 11d+11u = 11(d+u)$ et : $(10d+u)-(10u+d) = 9d-9u = 9(d-u)$

- Arithmétiquement, après un plusieurs essais, se rendre compte que l'un des facteurs de chaque somme P + R est la somme des valeurs des deux chiffres (exemple : 77 = 7x11 = (2+5)x11) et, de manière analogue, que l'un des facteurs de chaque différence P - R est la différence des valeurs des deux chiffres (exemple : -27 = -3 x 9 = (2 - 5) x 9) et par conséquent on peut trouver mentalement les deux chiffres dont on connaît la somme et la différence, par éliminations successives.

  Par exemple si on reçoit les deux indications 88 et 18, on sait que la "somme et la différence des deux chiffres" sont 8 et 2 et que parmi les décompositions de 8 : 8+0, 7+1, 6+2, 5+3, 4+4, ... il ne faut conserver que le couple (5;3) dont la différence est 2 pour savoir que le nombre pensé P est 53.

  Autre exemple avec une différence négative : 132 et -36 conduit à la somme 12 et à la différence -4 et l'on peut commencer l'inventaire des décompositions de 12 avec un premier terme plus petit que le second : 5+7, 4+8, pour s'arrêter à ce dernier couple (pour lequel la différence est -4) et obtenir P = 48.

-- Algébriquement, il s'agit de résoudre le système de deux équations à deux inconnues d et u, avec $d + u$ = (P + R)/11 et $d – u$ = (P – R)/9. La demi somme donne d et la demi différence donne u, ce qui conduit toujours à un couple unique (d ; u) de deux nombres naturels inférieurs à 10.

- Le truc » d'André est donc le suivant :
  - diviser le premier nombre donné par son grand-père par 11, cela donne le résultat S
  - diviser le deuxième nombre donné par son grand-père par 9, cela donne le résultat D
  - trouver le chiffre d des dizaines en faisant algébriquement la demi somme $(S+D)/2$
  - trouver le chiffre u des unités en faisant algébriquement la demi différence $(S–D)/2$
- On peut vérifier que le truc d'André marche pour tous les nombres, en considérant les cas particuliers des nombres de deux mêmes chiffres, ou des multiples de 10, ou des nombres d'un chiffre écrits avec un « 0 » comme dizaine.

  Exemples :

P	R	P + R	P – R	*d*	*u*
66	66	132 = **12**x11	0 = **0** x 9	12/2	12/2

50	05	55 = **5** x 11	45 = **5** x 9	10/2	0/2
05	50	55 = **5** x 11	–45 = –**5** x 9	0/2	10/2

donc le truc marche encore.

Attribution des points

4 Explication claire du « truc » et vérification qu'il marche toujours pour des nombres naturels inférieurs à 100

3 Explication confuse mais permettant cependant de retrouver le nombre pensé à partir des de la somme et de la différence

ou : réponse bien expliquée mais arrivant à la conclusion que le truc ne marche pas toujours, à la suite d'une confusion entre la différence (nombre entier relatif) et « l'écart » (valeur absolue). Dans ce cas, la réponse doit indiquer qu'il manque une une condition (par exemple : pense à un nombre de deux chiffres dont celui des dizaines et plus grand que celui des unités)

2 Découverte que la somme du nombre pensé et de celui renversé est un multiple de 11 et que la différence entre ces deux nombres est un multiple de 9, avec un ou plusieurs exemples

1 Début de raisonnement correct (avec quelques exemples et une propriété de la somme ou de la différence).

0 Incompréhension du problème

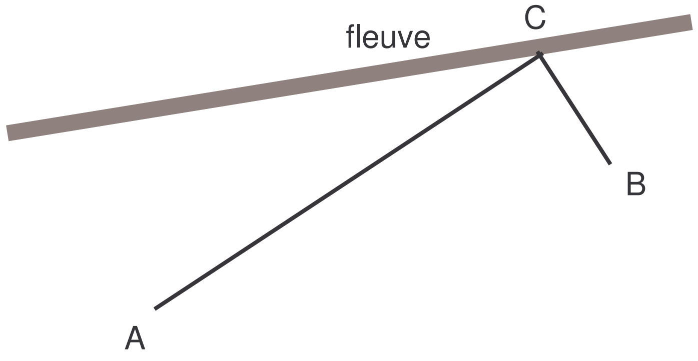
Niveaux: 10

Origine : Siena

20. LA NOUVELLE ROUTE (Cat. 9, 10)

Les villes Alpha (A) et Bêta (B) sont situées aux environs d'un fleuve dont les rives sont toutes droites à cet endroit. Imaginez que vous êtes un ingénieur chargé de tracer une nouvelle route qui relie les deux villes en passant par le bord du fleuve (voir l'exemple du dessin suivant).

Dessinez la route la plus courte possible et expliquez pourquoi il s'agit du parcours le plus bref.



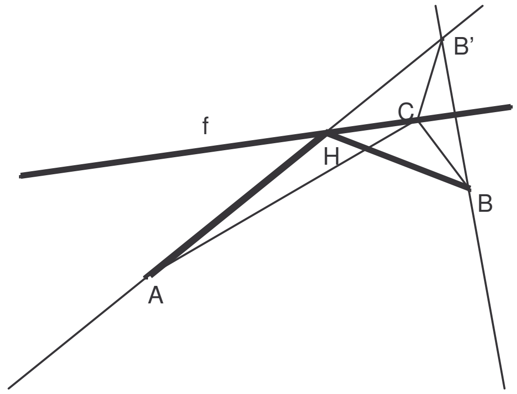
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : concept de distance, symétrie axiale

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que la distance varie en fonction du point choisi sur le fleuve. En mesurant les divers trajets, on s'approche de la solution cherchée, et unique
- Considérer que la rive « f » est droite et imaginer un point B' symétrique de B par rapport à l'axe « f ».
- Pour un point C quelconque sur « f », construire par symétrie axiale, CB' = CB. Le trajet A-C-B a même longueur que le trajet A-C-B'. L'intersection de la droite (AB') avec « f » détermine le point cherché H, car le trajet A-H-B' est plus court que le trajet A-C-B' et, comme HB = HB', le trajet A-H-B, de même longueur que A-H-B', est le plus court de tous les A-C-B.



Attribution des points

4 Réponse exacte avec explication de la raison pour laquelle le tracé est le plus court
3 Réponse exacte avec un dessin seulement
2 Solution trouvée par essais successifs (par mesure des deux segments)
1 Début de raisonnement (par exemple, considérer quelques points de f et mesure de leurs distances de A et de B)
0 Incompréhension du problème

Degrés : 9, 10

Origine : Ticino, d'après un problème « classique »