ALGORITHME D'EXTRACTION DES RACINES CARRÉES

Dans le contexte d'étude des algorithmes au lycée, nous vous proposons de découvrir celui d'extraction des racines carrées !

Traitons l'exemple de l'extraction de la racine carrée de $\boldsymbol{A} = 83\,756{,}361$.

1. On prépare un tableau avec 4 zones : $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_2}$, $\mathbf{Z_3}$ et $\mathbf{Z_4}$.

$\mathbf{Z_1}$	$\mathbf{Z_2}$
$\mathbf{Z_3}$	$\mathbf{Z_4}$

2. On regroupe les chiffres du nombre $\boldsymbol{A}$ par paquets de 2 à partir de la virgule, ici on obtient 8 37 56,36 1. On inscrit ainsi le nombre dont on cherche la racine carrée dans la zone $\mathbf{Z_1}$.

8 37 56, 36 1	

3. Comme la partie entière de $\boldsymbol{A}$ a 3 groupes de chiffres, la partie entière de la racine carrée de $\boldsymbol{A}$ a 3 chiffres, soit $\overline{\boldsymbol{a_2\, a_1\, a_0{,}b_1\, b_2\, b_3}\ldots}$ la racine carrée de $\boldsymbol{A}$.

$$\overline{\boldsymbol{a_2\, a_1\, a_0{,}b_1\, b_2\, b_3}\ldots} = 100\,\boldsymbol{a_2} + 10\,\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_0} + 10^{-1}\,\boldsymbol{b_1} + 10^{-2}\,\boldsymbol{b_2} + 10^{-3}\,\boldsymbol{b_3}\ldots$$

On utilise le développement de $\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{a_2\, a_1\, a_0{,}b_1\, b_2\, b_3}\ldots}^{\,2}$ sous la forme :

$$\begin{aligned}(100\boldsymbol{a_2} + 10\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_0} + 10^{-1}\boldsymbol{b_1} + 10^{-2}\boldsymbol{b_2} + 10^{-3}\boldsymbol{b_3}\ldots)^2 = {} & (100\boldsymbol{a_2})^2 + 10^2\,(20\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_1})\,\boldsymbol{a_1} \\ & + (200\boldsymbol{a_2} + 20\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_0})\,\boldsymbol{a_0} + 10^{-2}\,(2\,000\boldsymbol{a_2} + 200\boldsymbol{a_1} + 20\boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{b_1})\,\boldsymbol{b_1} \\ & + 10^{-4}\,(20\,000\boldsymbol{a_2} + 2\,000\boldsymbol{a_1} + 200\boldsymbol{a_0} + 20\boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2})\,\boldsymbol{b_2} \\ & + 10^{-6}\,(200\,000\boldsymbol{a_2} + 20\,000\boldsymbol{a_1} + 2\,000\boldsymbol{a_0} + 200\boldsymbol{b_1} + 20\boldsymbol{b_2} + \boldsymbol{b_3})\,\boldsymbol{b_3}\ldots\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a_2}$ est le plus grand entier dont le carré est contenu dans le groupe de gauche des chiffres de $\boldsymbol{A}$. Ici le groupe de gauche de $\boldsymbol{A}$ est 8 et donc $\boldsymbol{a_2} = 2$ dont le carré 4 est le plus grand carré contenu dans 8. On l'inscrit dans la zone $\mathbf{Z_2}$ du tableau

8 37 56, 36 1	2

Contact : conf-py-math@educagri.fr

4. On retranche le carré de $a_2 = 2$ (calcul dans la zone $\mathbf{Z_4}$) de 8 (soustraction dans la zone $\mathbf{Z_3}$), On obtient 4 comme reste et on "abaisse" le paquet de deux chiffres suivant dans la zone $\mathbf{Z_3}$.

8	37	56,	36	1	2	
− 4					2	
4	37				× 2	
					4	

On en déduit que $A-(100\,a_2)^2$ commence par $\overline{437}$ que l'on va approcher par le produit $(20\,a_2 + a_1)\,a_1 = (40 + a_1)\,a_1$.

5. On inscrit 4, le double de $a_2 = 2$, dans la zone $\mathbf{Z_4}$. On cherche le plus grand chiffre a_1 tel que $(40 + a_1)\,a_1$ soit contenu dans 437.

8	37	56,	36	1	2	
− 4					2	4...
4	37				× 2	× ...
					4	

Ici, $a_1 = 8$. On l'inscrit à droite du 2 dans la zone $\mathbf{Z_2}$ du tableau.

On effectue la multiplication dans la zone $\mathbf{Z_4}$ du tableau $48 \times 8 = 384$.

8	37	56,	36	1	2 8	
− 4					2	48
4	37				× 2	× 8
					4	384

6. On retranche 384 de 437 (soustraction dans la zone $\mathbf{Z_3}$), on obtient 53. On "abaisse" le paquet de deux chiffres suivant dans la zone $\mathbf{Z_3}$.

8	37	56,	36	1	2 8	
− 4					2	48
4	37				× 2	× 8
− 3	84				4	384
0	53	56				

Ici, on obtient 5 356. $A-(100\,a_2)^2-(20\,a_2 + a_1)\,a_1$ commence par $\overline{5\,356}$ que l'on va approcher par le produit $(200a_2 + 20a_1 + a_0)\,a_0 = (560 + a_0) \times a_0$.

7. On inscrit 56, le double de 28 (lecture de la zone $\mathbf{Z_2}$) dans la zone $\mathbf{Z_4}$.

On cherche le plus grand chiffre a_0 tel que $(560 + a_0) \times a_0$ soit contenu dans 5 356.

8	37	56,	36	1	2 8		
− 4					2	48	56...
4	37				× 2	× 8	× ...
− 3	84				4	384	
0	53	56					

Ici, $a_0 = 9$. On l'inscrit à droite du 28 dans la zone $\mathbf{Z_2}$ du tableau.

On effectue la multiplication dans la zone $\mathbf{Z_4}$ du tableau $569 \times 9 = 5\,121$.

8	37	56,	36	1	2 8 9		
− 4					2	48	569
4	37				× 2	× 8	× 9
− 3	84				4	384	5121
0	53	56					

Une valeur entière approchée par défaut de la racine carrée de 83 756,361 est 289.

Poursuivons maintenant pour trouver la partie décimale de la racine carrée de $\boldsymbol{A}$.

8. On retranche 5 121 de 5 356 (soustraction dans la zone $\mathbf{Z_3}$), on obtient 235. On "abaisse" le paquet de deux chiffres suivant dans la zone $\mathbf{Z_3}$. On obtient 23 536.

8	37	56,	36	1	2 8 9		
− 4					2	48	569
4	37				× 2	× 8	× 9
− 3	84				4	384	5121
0	53	56					
	− 51	**21**					
	2	**35**	**36**				

$\boldsymbol{A} - (100\,\boldsymbol{a_2})^2 - (20\,\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_1})\,\boldsymbol{a_1} - (200\boldsymbol{a_2} + 20\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_0})\,\boldsymbol{a_0}$ commence par $\overline{235{,}36}$. On va approcher 23 536 par le produit $(2\,000\boldsymbol{a_2} + 200\boldsymbol{a_1} + 20\boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{b_1})\,\boldsymbol{b_1}$ soit $(5\,780 + \boldsymbol{b_1}) \times \boldsymbol{b_1}$.

9. On inscrit 578, le double de 289 (lecture de la zone $\mathbf{Z_2}$) dans la zone $\mathbf{Z_4}$. On cherche le plus grand chiffre $\boldsymbol{b_1}$ tel que $(5\,780 + \boldsymbol{b_1}) \times \boldsymbol{b_1}$ soit contenu dans 23 536.

8	37	56	36	1	2 8 9			
− 4					2	48	569	**578...**
4	37				× 2	× 8	× 9	× **...**
− 3	84				4	384	5121	
0	53	56						
	− 51	21						
	2	35	36					

Ici, $\boldsymbol{b_1} = 4$. On l'inscrit à droite du 289 dans la zone $\mathbf{Z_2}$ du tableau.

On effectue la multiplication dans la zone $\mathbf{Z_4}$ du tableau $5\,784 \times 4 = 23\,136$. On retranche 23 136 de 23 536 (soustraction dans la zone $\mathbf{Z_3}$), on obtient 400. On "abaisse" le paquet de deux chiffres suivant dans la zone $\mathbf{Z_3}$. On obtient 40 010

8	37	56,	36	1	2 8 9, **4**			
− 4					2	48	569	**5784**
4	37				× 2	× 8	× 9	× **4**
− 3	84				4	384	5121	**23136**
0	53	56						
	− 51	21						
	2	35	36					
	− 2	**31**	**36**					
		4	**00**	**10**				

$\boldsymbol{A} - (100\,\boldsymbol{a_2})^2 - (20\,\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_1})\,\boldsymbol{a_1} - (200\boldsymbol{a_2} + 20\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_0})\,\boldsymbol{a_0} - (2\,000\boldsymbol{a_2} + 200\boldsymbol{a_1} + 20\boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{b_1})\,\boldsymbol{b_1}$

commence par $\overline{4{,}001}$. On va approcher 40 010 par le produit $(20\,000\boldsymbol{a_2} + 2\,000\boldsymbol{a_1} + 200\boldsymbol{a_0} + 20\boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2})\,\boldsymbol{b_2}$ soit $(57\,880 + \boldsymbol{b_2}) \times \boldsymbol{b_2}$.

10. On inscrit 5 788, le double de 2 894 (lecture de la zone $\mathbf{Z_2}$) dans la zone $\mathbf{Z_4}$. On cherche le plus grand chiffre $\boldsymbol{b_2}$ tel que $(57\,880 + \boldsymbol{b_2}) \times \boldsymbol{b_2}$ soit contenu dans 40 010.

Ici, $\boldsymbol{b_2} = 0$. On l'inscrit à droite du 289,4 dans la zone $\mathbf{Z_2}$ du tableau.

On "abaisse" le paquet de deux chiffres suivant dans la zone $\mathbf{Z_3}$. On obtient 4 001 000. On inscrit le double de 28 940 (lecture de la zone $\mathbf{Z_2}$) dans la zone $\mathbf{Z_4}$. On cherche le plus grand chiffre $\boldsymbol{b_3}$ tel que $(578\,800 + \boldsymbol{b_2}) \times \boldsymbol{b_2}$ soit contenu dans 4 001 000.

Ici, $\boldsymbol{b_3} = 6$. On l'inscrit à droite du 289,40 dans la zone $\mathbf{Z_2}$ du tableau.

8	37	56,	36	1
− 4				
4	37			
− 3	84			
0	53	56		
	− 51	21		
	2	35	36	
	− 2	31	36	
		4	00	10 00

2 8 9,4 0 **6**					
2	48	569	5784	57880	**578806**
× 2	× 8	× 9	× 4	× 0	× **6**
4	384	5121	23136	0	**3472316**

Une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-3} près de la racine carrée de 83 756,361 est 289,406.

On peut bien sûr continuer...

Un autre exemple

Extrayons la racine carrée de 519 406.

51	94	06		
− 49				
2	94			
− 2	84			
0	10	06	00	
	− 8	64	36	
	1	41	64	00
	− 1	29	71	61
		11	92	39 00

7 2 0,6 9 8				
7	142	14406	144129	1441388
× 7	× 2	× 6	× 9	× 8
49	284	86436	1297161	11531104

Une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-3} près de la racine carrée de 519 406 est 720,698.

Contact : conf-py-math@educagri.fr